ВЛАДИМИР ЧАКАЛОВ ЗА ЯРОСЛАВ ТАГАМЛИЦКИ

Малко време изтече, откакто професор Ярослав Тагамлицки не е между нас. И все пак то е достатъчно, за да можем, ако не да обхванем и преценим, то поне да съзрем мястото на неговото дело на учен и педагог.

В тези кратки бележки без претенция за задълбоченост и широта ще се опитаме да очертаем контурите на това дело.

Нека ни бъде позволено най-напред да се спрем на обстановката в университета по времето, когато Тагамлицки завършва математическото си образование през 1940 г. По това време обликът на българската математика се дава от тогавашните професори Димитър Табаков, Кирил Попов, Никола Обрешков, Любомир Чакалов и Иван Ценов.

През първата година на своето следване студентите-математици слушат лекциите на Димитър Табаков по аналитична геометрия, на Кирил Попов по диференциално и интегрално смятане и на Никола Обрешков по висша алгебра. В мирогледно отношение най-важен през тази първа година е курсът по диференциално и интегрално смятане, защото той е основа, върху която се градят останалите математически дисциплини, които имат отношение към граничните преходи; такива са например диференциалните уравнения, комплексният анализ, аналитичната механика и диференциалната геометрия.

Курсът по диференциално и интегрално смятане на Кирил Попов обхваща традиционния материал по тези дисциплини. По отношение на строгост и яснота обаче има какво да се желае. Така например понятието за граничен преход се основава на нестрого описаното понятие променлива величина. Не се излага с необходимата пълнота теорията на редиците. От нея се дава само едно своеобразно и трудноразбираемо доказателство на теоремата на Коши за пълнота на множеството на реалните числа. Важните топологични факти, свързани с понятията непрекъснатост и компактност, също не са изложени задоволително. Понятията за лице и обем, които предхождат построяването на кратните интеграли, се считат за известни от средното училище и не се дефинират. В замяна на това се отделя достатъчно внимание за създаване на полезни геометрични представи. На места тези представи даже заменят строгите разсъждения. Накратко казано духът на курса по диференциатно и интегрално смятане, е ако можем да се изразим така, физически. Това съответства на мирогледа на проф. К. Попов, който в научните си занимания отдава предпочитание на приложенията на математиката. В подкрепа на това твърдение ще отбележим например интересите му към астрономията, от която област е и докторската му теза, а също и интересите му към външната балистика, теорията на застрахователното дело, както и към някои задачи, породени от химията.

В тази обстановка през 1940 г. Ярослав Тагамлицки е назначен за специализант в Математическия институт на Софийския университет. Може да се каже, че заедно с него в катедрата по диференциално и интегрално смятане прониква духът на съвременната математика.

Въпреки очевидните различия във възгледите на професора и на новоназначения му сътрудник Кирил Попов предоставя на последния пълна свобода в избора на научни занимания. Той усеща, че Тагамлицки има достатъчно сили да намери сам пътя си в науката, уважава тази негова самостоятелност и следи благосклонно развитието му. От своя страна Тагамлицки е признателен за предоставената му свобода. Така въпреки различията между професор и асистент се установяват отношения на взаимно уважение, които продължават до самата смърт на Кирил Попов.

Още от самото начало дейността на младия Тагамлицки се развива в две направления. От една страна, непосредствено след назначението му за специализант, а след това като докторант в Лайпцигския университет (през учебната 1942/43 г. Тагамлицки е на специализация при известния математик Кьобе, която завършва със защита на докторска теза през 1944 г.) и по-късно като асистент той развива интензивна научна дейност. От друга страна, той обръща голямо внимание на упражненията и се старае да попълни в тях някои от празнините на лекционния курс. Още тук проличава умението му да забелязва добрите студенти и да ги импулсира за работа. Тези две направления изпълват в еднаква степен цялата му научна и педагогическа дейност. Тук ще кажем по нещо за всяка от тези две страни на неговото дело.

Като говорим за научната работа на Тагамлицки, може би ще трябва да пропуснем първите му работи и да започнем от онзи цикъл от публикации, в които проличава как постепенно в него се заражда и създава понятието за неразложимост, на което той посвети най-съществената част от изследванията си.

В първата работа от този цикъл, излязла през 1946 г., той решава един въпрос, свързан с една задача, дадена му от проф. Н. Обрешков, с което поставя начало на изследванията си върху неразложимостта. Най-същественият резултат в тази работа се съдържа в следната теорема:

Ако $f(x)$ има производни от произволен ред в интервала $x<a$ и ако за $k = 0, 1, 2. \dots$ е в сила $|f^{(k)}(x)| \leq Ae^x$ при $x<a$, то $f(x)=Be^x$, където $|B|\leq A$.

Тази теорема показва ясно, че експоненциалната функция е в известен смисъл екстремална. Заинтересуван от този факт, в следващата си работа (от 1947 г.) той пренася този резултат за числови редици, където ролята на k-тата производна се поема от k-тата крайна разлика на редицата, а ролята на експоненциалната функция — от безкрайната геометрична прогресия с частно $q\in(0,1)$. Изхождайки от тези задачи, Тагамлицки скоро схваща, че те са частни случаи от по-общи задачи и това постепенно го довежда до осъзнаване на ролята на неразложимостта. За първи път той използва това понятие в работата „Изследване на една класа от функции“, публикувана в Годишника на университета през 1948 г. В нея, като използва неразложимите елементи, той доказва следната теорема:

За да може една безбройно много пъти диференцируема функция $f(x)$ да се развие при $x > a$ в абсолютно сходящ ред на Дирихле:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{-\lambda_\nu x}$$

съответстващ на редицата $\lambda_1, \lambda_2, \ldots (\lambda_i \neq \lambda_j$ за $i \neq j)$ е необходимо и достатъчно при $x > a$ да съществува функция $g(x)$, притежаваща дирихлетово развитие от същия тип с неотрицателни коефициенти

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu e^{-\lambda_\nu x}$$

която да удовлетворява неравенствата:

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k g^{(k)}(x) \quad (x > a, k = 0,1,2,\ldots)$$

В такъв случай $|A_\nu| \leq B_\nu$

Доказва се и аналогична теорема за представяне с лапласови интеграли.

Безспорно най-интересната работа от този кръг е изследването върху абелевия интерполационен ред. Още в началото на миналия век Абел разглежда следната интерполационна задача:

Нека $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ са $n+1$ последователни членове на една аритметична прогресия. Да се намери полином $P(x)$ най-много от n-та степен, за който са в сила равенствата $P^{(k)}(x_k) = a_k$ $(k = 0,1,..,n)$, при което a_k са дадени числа. Както лесно се вижда, това свойство притежава само полиномът

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \frac{1}{k!}(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}$$

Естествено е да се запитаме дали подобна формула не е в сила и за $n = \infty$; с други думи:

Ако е дадена безкрайната аритметична прогресия $x_0, x_1, x_2, \ldots$ с първи член $x_0 > a$ и разлика $x_{n+1} - x_n > 0$, както и безкрайната редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, може ли да се намери функция $f(x)$, имаща производни от произволен ред за $x > a$, така че за $x > a$ да е валидно развитието

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \frac{1}{k!}(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}$$

Ясно е, че горната задача невинаги има решение, защото константите a_k могат да се изберат така, че редът от дясната страна да не е сходящ. Оказва се обаче, че даже да е сходящ, задачата пак може да няма решение. Може дори да се окаже, че редът е сходящ, че съществува функция $f(x)$, която има производна от произволен ред за $x > a$ и за която $f^{(k)}(x_k) = a_k$ но въпреки това сумата на реда да се различава от $f(x)$. Френският математик Алфан дава достатъчни условия за развитие на функции в абелев ред. На Тагамлицки се удава да намери причината, поради която горната задача невинаги има решение, и да ѝ даде изчерпателен отговор. Ето неговият подход. Той разглежда пространството R от всички реални функции, дефинирани и притежаващи производни от произволен ред в интервала $x > a$. Нека редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е аритметична прогресия с първи член $x_0 > a$ и разлика $\tau = x_{n+1} - x_n > 0$. В R се въвежда частична наредба по следния начин. За някоя $f(x) \in R$ имаме $f(x) \succ 0$ ако са в сила неравенствата $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$ за $a < x < x_\kappa$ $(k = 0, 1, 2,\ldots)$. Един елемент $f(x) \in R$ е неразложим относно въведената наредба, ако е колинеарен на всеки елемент, който го минорира, т.е. ако от $\varphi(x) \in R$ и $0 \prec \varphi(x) \prec f(x)$, следва $\varphi(x) = \lambda f(x)$. Най-същественото тук е, че Тагамлицки намира всички неразложимн елементи относно тази наредба. Оказва се, че освен абелевите полиноми $P_k(x) = c(x - x_0)(x - x_k)^{k-1}$ $(k = 0, 1, 2,\ldots; c > 0)$. има още неразложимн вектори. А именно, ако $\tau\lambda$ и $\tau\mu$ са положителните корени на уравнението $ye^{1-y} = t \;\; (0 < t < 1)$, то функцията

$$R(x,t) = \frac{1}{\lambda - \mu}\left(e^{\lambda(x_0 - x)} - e^{\mu(x_0 - x)}\right)$$

е неразложим елемент. Освен това неразложим елемент е и функцията $R(x,1) = (x_0 - x)e^{(x_0 - x)\tau}$

При тези условия той доказва следната теорема:

За да може една безбройно много пъти диференцируема функция $f(x)$ (при $x > a$) да се представи във вида

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1} + \int_0^1 R(x,t)d\theta(t),$$

където интегралът $\int_0^1 R(x,t)d\theta(t)$ е абсолютно сходящ, а редът $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}(x_0 - x)(x_\nu - x)^{\nu-1}$ е сходящ поне при една стойност на x, различна от x_0 (следователно сходящ навсякъде), е необходимо и достатъчно $f(x)$ и константата 0 да притежават обща мажоранта относно нареждането в R. Горното представяне е единствено, ако функцията с ограничена вариация $\theta(t)$ е нормирана.

След този завършен резултат (ще споменем, че за него той е удостоен с Димитровска награда) Тагамлицки насочва усилията си за усъвършенстване на метода и намиране на нови приложения. Така през 1953 г. той публикува една обща теорема, позната под името „теорема за конусите“. Тя гласи (грубо казано):

Ако L и K са два конуса, които удовлетворяват някои условия (не ще ги изброяваме) и ако L съдържа неразложимите елементи на K, то L съдържа и целия конус K.

Заедно с това той дава и редица приложения на тази теорема, като теоремите на Хаусдорф за моментите (позитивен и непозитивен случай), теоремата на Уидер, теоремата на Бернщейн за интегрално представяне на регулярно монотонните функции и др.

През учебната 1954/55 г. Тагамлицки прочете един лекционен курс по обобщени функции, в който изложи своите изследвания в тази област. Резултатите бяха публикувани в поредица от три работи, а друг вариант бе публикуван в една съвместна работа с Д. Дойчинов.

Тези изследвания съвпаднаха с периода на най-голям възход на кръжока към катедрата по диференциално и интегрално смятане, за който ще кажем няколко думи.

Кръжокът към катедрата беше основан в самото начало на петдесетте години. По това време връзките на нашата математика с външния свят бяха практически прекъснати. Никой — бил той студент или завършил математика — не можеше да мечтае за следване или специализация в някой европейски университет, а още по-малко отвъд океана. По онова време хората от нашето поколение познаваха само нашия университет и се срещаха с науката само чрез нашите тогавашни преподаватели — професори, доценти и асистенти. На този фон най-силно изпъкваше фигурата на Ярослав Тагамлицки. Неговият ентусиазъм, желанието му да работи с младите, да ги въведе в области, в които работеше интензивно — всичко това не можеше да остави равнодушни добрите студенти и младите асистенти. И скоро в неговия кръжок се създаде неповторима атмосфера, в която всички участници се стремяха според възможностите си да проявят максимална активност в решаването на възникналите задачи. Тази именно атмосфера предопредели по-нататъшния път на много от участниците в кръжока.

Разбира се, по-късно нещата се измениха. Младите хора получиха несравнимо по-големи възможности за научно развитие чрез следване, специализация или участие в работата на реномирани чужди университети и научни центрове. Кръжокът на Тагамлицки вече не беше единственият път, който начинаещият трябва да измине, за да навлезе в науката. Естествено, това доведе до отлив на студентите от кръжока. До края на живота си обаче Тагамлицки не жалеше сили и смяташе работата си с кръжочниците за свое първостепенно задължение.

През 1957 г. на Тагамлицки стана известно, че неговата теорема за конусите е частен случай от теоремата на Крейн и Милман. Това обстоятелство послужи като тласък към нови изследвания в тази област. На първо място Тагамлицки се заинтересува от това, дали понятията изпъкналост и неразложимост не могат да се обобщят и за нелинейни пространства. В резултат в края на петдесетте и началото на шестдесетте години той обобщи понятието изпъкналост и (при подходяща естествена дефиниция на полупространство) намери условия, при които за всеки две непресичащи се непразни изпъкнали множества съществува полупространство, съдържащо само едното от тях.

По-нататъшните изследвания го доведоха до обобщение на понятието неразложимост за нелинейни топологични пространства. Именно той доказа една теорема (така наречената теорема за топологична индукция), която подобно на теоремата на Крейн и Милман дава възможност да заключим, че едно множество съдържа друго множество, ако съдържа неразложимите му елементи. От тази теорема следва теоремата на Крейн и Милман.

Малко по-късно вниманието на Тагамлицки беше привлечено от така наречения от него диагонален принцип. Още през шестдесетте години той забеляза, че теоремата на Тихонов може да се използва за извършване на диагонален процес. Изследванията в тази насока продължиха и в резултат Тагамлицки достигна до едно обобщение, което се формулира просто и което не използва даже понятието топология. От това обобщение като съвсем специален случай следва теоремата на Тихонов.

През последните години от живота си Тагамлицки се занимаваше с изучаване на теорията на многообразията. Той работеше по изграждането на един вариант на тази теория с подчертано аналитичен характер. В тази област обаче той не публикува нищо. Най-вероятната причина за това е, че не смяташе изследванията си за достатъчно завършени.

Когато ставаше дума за кръжока на Тагамлицки, бе споменато, че той считаше за свое първостепенно задължение работата си с младите. Това се отнася всъщност за цялата му дейност на педагог. За тази дейност не се налага да говорим много, защото всички, които са слушали лекциите на Ярослав Тагамлицки, я познават добре. Те знаят отличните лекции на Тагамлицки по диференциално и интегрално смятане, които никога не се превърнаха в рутинен курс, а всяка година претърпяваха изменения, показващи характерния за Тагамлицки стремеж към обновяване. Мнозина са се готвили по неговия съдържателен и добре премислен учебник — първият издържан в научно отношение учебник по тази дисциплина у нас. За педагогическото майсторство на неговия автор говорят наред с всичко друго и подбраните с много вкус оригинални задачи.

Не един млад математик е бил въведен в науката от лекциите по функционален анализ, които Тагамлицки четеше ежегодно в продължение на много години. Особеното на тези лекции се състоеше в това, че в тях се излагаха въпроси, интересуващи в момента лектора, а — което е най-ценното — излагаха се и собствените му изследвания, често поднесени в първоначалната им форма. По този начин слушателите имаха възможността да надникнат в процеса на научното творчество.

По-младите колеги на Тагамлицки са свидетели на това, как години наред той носеше без видимо усилие тежката си педагогическа натовареност, достигаща до 10 часа лекции седмично. Нещо повече, всички те знаят как на всеки намек за нейното намаляване той гледаше едва ли не като на посегателство към неговата личност. По всичко изглежда, че тази постоянна, ежедневна лекционна заетост беше неотменима част от неговия живот.

Като говорим за преподавателската дейност на Тагамлицки, не можем да отминем и приноса му към средното ни образование. Така например той многократно е чел пред ученици поредици от лекции, в които с характерното си умение подбираше съдържателни въпроси, способни да култивират добър математически вкус у слушателите.

Малцина знаят, че Тагамлицки е автор на един метод за въвеждане на понятията производна и интеграл, който не се основава на понятието граничен преход, поради което изучаването му не изисква толкова усилия. Нещо повече, през учебната 1973/74 г. заедно с учителката София Димитрова той води занятия (по два часа седмично) в две паралелки на IX клас в VIII гимназия, в които в течение на цялата година експериментираше този метод. Резултатите бяха насърчителни, но за съжаление методическите среди не проявиха достатъчно интерес и експериментът остана неизползван, а преподаването на елементите на анализа в средното училище остана на старото ниво.

Цялостната дейност на Тагамлицки получи обществено признание. Той бе избран за член-кореспондент на Българската академия на науките, награден бе с ордени „Кирил и Методий“ I и II степен, удостоен бе със званието „Заслужил деятел на науката“. Без риск да сгрешим обаче можем да кажем, че делото на Тагамлицки не само напълно заслужи, но и надхвърли изразите на това обществено признание. Но за един учен, който подобно на Тагамлицки живее със и за своята наука, тези изрази не са от първостепенно значение. Много по-важно е каква следа оставя той чрез научното си наследство и чрез въздействието върху неговите приемници. А в това отношение Ярослав Тагамлицки остави наистина ярка следа.