## ДИОФАНТОВИТЕ АПРОКСИМАЦИИ В ТВОРЧЕСТВОТО НА Н. ОБРЕШКОВ

Академик Никола Обрешков е посветил на темата диофантовн апроксимацни 18 публикации. Първите си резултати в тази област той публикува през 1949 г. [1, 2, 5, 19, 20]: първото съобщение е представено за публикуване в *Доклади на БАН* на 15 ноември 1948 г. Начален резултат е следната негова теорема.

Нека $\omega$ е произволно ирационално число и $\omega = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}$ е развитието му в правилна верижна дроб ($a_1$ е цяло число, а $a_2, a_3, \ldots$ са цели положителни), а $\frac{P_m}{Q_m} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_m}}$ е $m$-тата приближена дроб на $\omega$.

Тогава сред всеки три последователни приближени дроби $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}$ има поне една дроб $\frac{p}{q}$, за която $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{a_n^2 + 4}}$.

Като допълнение към тази теорема Обрешков определя и множеството от ирационални числа $\omega$, съответстващи на всяко цяло положително число $m$, за които поне една дроб $p/q$ от три последователни приближени дроби удовлетворява неравенството $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{m^2+4}}$, като константата $\sqrt{m^2+4}$ не може да се замени с по-голяма.

Горната теорема на Обрешков е обобщение на класическата теорема на Борел [21] от 1903 г., според която за поне една дроб $p/q$ от три приближени дроби на $\omega$ е в сила: $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{5}}$

За да изясним по-добре приноса на Обрешков, ще трябва да видим какво са постигнали други в тази област. Началото слага П. Г. Льожон-Дирихле през 1842 г., като доказва, че ако $\alpha$ и $Q$ са реални числа, $Q>1$, то съществуват цели числа $p$ и $q$, за които $1\leq q<Q$ и

$$|\alpha q - p| < \frac{1}{Q}, \text{ т.е. } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Qq} < \frac{1}{q^2}$$

Две години по-късно Ж. Лиувил извежда свои резултат за неравенство от вида $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C(\alpha)}{q^\beta}$ и полага основите на ново направление за изучаване на алгебричните и трансцендентните числа, в което съществени резултати постигат А. Туе през 1909 г. и К. Ф. Рот през 1955 г.

В първоначалната насока, дадена от Дирихле, силен резултат постига през 1891 г. А. Хурвиц, който доказва, че за всяко ирационално число $\alpha$ съществуват безбройно много различни рационални числа $\frac{p}{q}$, за които $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, и $\sqrt{5}$ не може да се замени с по-голяма константа. Теоремата на Борел от 1903 г., за която стана дума по-горе, е по-силна от тази на Хурвиц, тъй като дава повече информация за числата $\frac{p}{q}$ като приближени дроби за $\alpha$. Теоремата на Обрешков е по-силна от тази на Борел, понеже заменя константата $\sqrt{5}$ с функцията $\sqrt{a_n^2+4}$, която винаги е най-малко равна на $\sqrt{5}$, но може да бъде и неограничено голяма.

Ако запишем неравенството в теоремата на Обрешков във вида

$$-\frac{1}{q^2\sqrt{m^2+4}} < \omega - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2\sqrt{m^2+4}}$$

ще можем да го определим като едно симетрично неравенство или една симетрична апроксимация. Интересен резултат за несиметрична апроксимация бе получил още през 1945 г. италианският геометър Бениамино Сегре, който е доказал по геометричен път, че за всяко ирационално $\alpha$ и за всяко реално $\tau\geq 0$ съществуват безбройно много рационални числа $p/q$ със свойството

$$-\frac{1}{q^2\sqrt{1+4\tau}} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{\tau}{q^2\sqrt{1+4\tau}}$$

Ако изберем $\tau$ така, че $\frac{\tau}{\sqrt{1+4\tau}} < \frac{1}{\sqrt{a_n^2+4}}$, което е възможно само при $\tau<1$, ще получим по-силно неравенство от това в теоремата на Обрешков, но не и безусловно по-силна теорема, защото в теоремата на Сегре се определят изобщо безбройно много дроби $p/q$ докато от теоремата на Обрешков се знае, че те са поне по една на всеки три последователни приближени дроби. В този смисъл теоремата на Обрешков е по-силна от тази на Сегре.

Вярно е, че и теоремата на Сегре допуска прецизиране, както това показа румънският математик Николае Негоеску, който също през 1949 г. публикува теорема [22], според която неравенствата в теоремата на Сегре се изпълняват от поне една от три приближени дроби.

Публикацията на Негоеску е депозираната 19 ноември 1948 г., т.е. 4 дни след като Обрешков е представил за първи път своя резултат. Освен това в работата на Негоеску има нещо ненаред. Известният английски математик Р. А. Ранкин [23] пише, че е могъл да провери твърдението на Негоеску само при $\tau \geq 1$ (а подобряване на неравенството в теоремата на Обрешков може да се постигне само при $\tau < 1$). Американският математик У. Дж. Левек [24] показа в публикацията си от 1953–54 г., че теоремата на Негоеску е грешна в някои случаи и че е вярно, че от всеки 5 последователни приближени дроби поне една удовлетворява неравенствата на Сегре, както и че при леко изменение на неравенствата (които пак могат да се направят по-силни от това на Обрешков само при $\tau < 1$), същите ще се удовлетворяват от поне една от четири приближени дроби. Оттук следва, че теоремата па Обрешков за трите последователни приближени дроби остава ненадминината.

Но беше повторена. Това направи Макс Мюлер от Тюбинген (ФРГ), който през 1955 г. доказа [25] теорема (там теорема 6), която напълно и дословно съвпада с тази на Обрешков (без той да е цитиран). Нещо повече, и допълнението към теоремата на Обрешков е повторено с несъществено различие (там теорема 9). И тъй като статията на Мюлер е депозирана на 30 ноември 1954 г., т.е, 5 години след първата публикация на теоремата на Обрешков, приоритетът на последния е безспорен (което и сам той неведнаж заявяваше).

Във всичките си 18 научни публикации по разглежданата тук тема Обрешков прави задълбочени изследвания на линейните форми с две и повече променливи. В последната сн работа [18] той доказва следните две теореми:

1. Нека $a$ и $n$ са естествени числа и $n > a$. Тогава за всяко реално число $\omega$, удовлетворяващо условията $0 < \omega \leq a$, съществуват поне две цели неотрицателни числа $x$ и $y$, за които $|\omega x - y| \leq \dfrac{1}{\left[\dfrac{n-a}{a+1}\right] + 2}$ (знакът равенство се достига), като $0 < x + y \leq n$

2. Нека $p$ и $d$ са естествени числа с $d \leq p$ и $n$ е естествено число, кратно на $\dfrac{d}{(p, d)}$. Нека $\omega_1, \ldots, \omega_p$ са реални числа. Тогава съществуват $p$ цели неотрицателни числа $x_1, \ldots, x_p$, поне $d$ от които са различни от нула, и цяло число $y$, така че е изпълнено неравенството $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_p x_p - y| \leq \dfrac{d}{np + d}$ (знакът за равенство се достига) и $x_s \leq n \ (s = 1, 2, \ldots, p)$

Един от най-силните резултати на Н. Обрешков е свързан с определянето на така наречената константа на Борел. В цитираната вече работа [21] на Борел от 1903 г. същият покрай другите си резултати извежда и следната теорема, която предаваме в буквален превод:

Съществуват безбройно много системи от стойности на целите $x, y, z$, такива че имаме

$$|ax + by + z| < \theta \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{z^2}$$

където $a$ и $b$ са какви да е константи, а $\theta$ е константа, която не зависи от $a$ и $b$.

Тази теорема може да се изкаже и така.

Нека $a$, $b$ и $N$ са дадени реални числа, като $N \geq 1$. Тогава съществуват цели числа $x, y, z$, не всички равни на нула, за които $|ax + by + z| < \theta \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{N^2}$, като $|x| \leq N, |y| \leq N, |z| \leq N$, където $\theta$ е константа, независеща от $a$, $b$ и $N$.

Борел прави геометрични изследвания на тази теорема, но константата $\theta$ той не определя. Тя остана неопределена повече от 50 години. През 1956 г. Обрешков доказа [11, 13, 17], че $\theta = 1$.

В авторитетната и многократно издавана "История на теорията на числата" от Л. Е. Диксън същият пише за тази константа, че тя е неоткрита. Така пише и в най-новото ѝ издание от 1966 г., но това се дължи на факта, че книгата се препечатва без текстуални изменения на оригинала от 1919 г.

В работата си [16] от 1958 г. Обрешков изследва линейни форми с произволен брой променливи и апроксимирането им с цели числа, с което "подобрява класическия резултат на Дирихле", както пише Каселс в един свой реферат. Оттук като частен случай той получава следната теорема:

Нека $a_1,\ldots,a_k$ са цели числа и $m$ е цяло положително число. Тогава конгруенцията $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \ m)$ има винаги решения в цели числа $x_1,\ldots,x_k$, не всички които удовлетворяват условията $|x_p| \leq \sqrt[k]{m}$, $(p = 1,\ldots, k)$

От тази теорема, като частен случай при $k$ =2, следва известната теорема на Туе–Нагел. От направения тук кратък преглед е ясно, че приносът на академик Никола Обрешков в теорията на диофантовите апроксимации има не само национално значение — той е от световен мащаб.

## ИЗПОЛЗВАНА ЛИТЕРАТУРА


1. Обрешков Н., Върху апроксимацията на ирационалните числа. Год. Соф. унив., Природо-мат. фак., 45 (1949). кн. 1, 179–201.
2. N. Obrechkoff. Sur l'approximation des nombres irrationels. C. R. Acad. Sci. Paris, 228 (1949), 352–353.
3. Обрешков Н., Апроксимация на $n$ линейни форми с $n$ неизвестни. Год. Соф. унив., Природо-мат. фак.. 45 (1949). кн. 1, 287–292.
4. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantique linéaire. Rendiconti Accad. Naz. Lincei. cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8), 6 (1949), 283—235.
5. Обрешков Н., О приближении иррациональных чисел рациональными дробями. Доклады БАН, 3, № 1 (1950), 1–4.
6. Обрешков Н., Върху диофантовите апроксимации на линейните форми при положителни стойности на променливите. Год. Соф. унив., Природо-мат. фак., 46, кн. 1 (1950), 343—356.
7. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantique linéaire. C. R. Acad. Bulg. Sci., 3, No. 2–3 (1950), 1–4.
8. Обрешков Н., О диофантовых приближениях линейных форм для положительных значений переменных. Доклады АН СССР, 73. № 1 (1950), 21–24.
9. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantique linéaire pour des valeurs positifs des variables. C. R. AcaJ. Bulg. Sci.. 4, № 1 (1951), 1–4.
10. Обрешков Н., Върху апроксимацията на линейните форми. Известия Мат. инст. БАН, 1, кн. 2. (1954), 35–46.
11. N. Obrechkoff. Sur une question de l'approximation diophantique des formes linéaires. C. R. Acad. Bulg. Sci., 9, № 4 (1956), 1–4.
12. Обрешков Н., Две теореми за апроксимацията на линейните форми. Известия Мат. инст. БАН, 2, кн. 1, (1956), 33–43.
13. Обрешков Н., Върху някои точни неравенства за диофантовите приближения на линейните форми. Известия. Мат. инст. БАН, 2 (1957), 19–44.
14. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantienne des nombres réels. C. R. AcaJ. Sci. Paris, 246 (1958), 31–32.
15. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantienne des formes linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 204—205.
16. N. Obrechkoff. Sur l'approximation diophantienne des formes linéaires. Arkiv för Matematik, 3 (1958), 537—542.
17. Обрешков Н., Об одном из вопросов диофантовых приближений линейных форм. Труды третьего всесоюзного математическото съезда. Москва, июн – июль 1956. Том IV. Москва, 1959, 133–139.
18. Обрешков Н., Върху диофантовите приближения на линейни форми. Известия Мат. инст. БАН, 3, кн. 2 (1959), 3—18.
19. Обрешков Н., *Сборник от задачи и теореми по висша алгебра.* София, 1952*
20. Обрешков Н., *Теория на числата*. София, 1955 г. ; второ преработено издание, 1962.
21. Borel E., Contribution à l'analyse arithmétique du continu. Journ. de Math. pures et appl., ser. V, 9, (1903), 329—375.
22. Negoescu N., Notă asupra unei teoreme de aproximaţiuni asimetrice. Acad. Rep. pop. Romane, Bul. Şti., A. Mat. fiz., 1, № 2 (1949), 1–3.
23. Rankin R. A., Mathematlcal Reviews, 13, № 7 (1952), p. 630.
24. Leveque W. J., On asymmetric approximations. The Michigan Math. J., 2 (1953–54), 1—6.


Тонко Тонков

* Пропуснато в библиографията на Н. Обрешков, поместена в том I на съчиненията му.