НУЛИ НА ПОЛИНОМИТЕ У Н. ОБРЕШКОВ

Любима научна област, непресъхващ извор на вдъхновение, област на най-ранни и крупни постижения, донесли на автора им заслужено световно признание в нея, област на младежко дързновение и на зряло научно творчество — това за акад. Обрешков бе и остана до края на живота му разпределението на корените на алгебричните уравнения.

През 1922 г. асистентът Никола Обрешков е избран за редовен доцент към катедрата по алгебра на Физико-математическия факултет при Софийския университет по препоръка на докладчиците – Емануил Иванов и Кирил Попов.

Една от публикациите, представени от Обрешков за участие в конкурса, е *„Върху разпределението на корените на алгебричните уравнения“*, отпечатана в Годишника на Физико-математическння факултет, 15–16 (1921). Това скромно заглавие с нищо не издава научните приноси, съдържащи се в нея. Едва ли някой е подозирал, че теоремата на Декарт за броя на корените на алгебричните уравнения с реални коефициенти, както и теоремата на Бюдан-Фурие, могат да бъдат обобщени по един естествен начин и за броя на комплексните корени на такива уравнения.

Докладчиците не скриват възхищението си от резултатите на Обрешков. В доклада си К. Попов помества отговора на писмото, което той е изпратил до проф. И. Шур, завеждащ катедрата по алгебра в Берлинския университет. Шур преценява обобщението на теоремата на Бюдан-Фурие, дадено от Обрешков, като "забележително по своята елегантност и простота" и го нарича "ценен принос към теорията на алгебричните уравнения“.

Съгласно правилото на Декарт *броят на положителните корени на едно алгебрично уравнение с реални коефициенти е равен или е с четно число по-малък от броя V на вариациите му* (броя на смените на знаците на коефициентите му, които са различни от нула). При това кратните корени се броят толкова пъти, ковкото е кратността им.

Така например уравнението $x^4–6x^3+2x–1 = 0$ има или три, или един положителен корен, тъй като в редицата на коефициентите му 1, –6, 0, 2, –1 има три смени (вариации) на знаците им.

В окончателната си форма обобщението на теоремата на Декарт, дадено от Обрешков в цитираната по-горе негова работа, гласи:

Ако степента на алгебрично уравнение с реални коефициенти е n и V е броят на вариациите му, то тогава броят на корените му, чиито аргументи лежат между $-\dfrac{\pi}{n-V}$ и $\dfrac{\pi}{n-V}$ е равен на V или е с четно число по-малък.

В следващото изложение се разказва, макар и в описателна форма, как Обрешков стига до този наистина забележителен резултат.

Да припомним на читателя, че всъщност първото строго доказателство на правилото на Декарт се основава на една лема на Зегнер, съгласно която, *ако полином с реални коефициенти се умножи с бинома $x-c$ при $c>0$, броят на вариациите му се увеличава с нечетно число.*

Това правило може да се получи и като следствие от *теоремата на Бюдан-Фурие*, съгласно която

ако $f(x)$ е полином от n-та степен ($n \geq 1$) с реалии коефициенти и V означава броя на вариациите в редицата от числа

$$f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x),$$

то броят на корените на уравнението $f(x) = 0$ в интервала (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ е равен или е с четно число по-малък от разликата $V_a - V_b$.

От това твърдение при $a = 0$ и $b = \infty$ се получава теоремата на Декарт

Нека λ е различно от 0 комплексно число. Ако го представим в тригонометричен вид $\lambda = p(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и вземем предвид, че $\overline{\lambda} = p(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, след елементарни пресмятания получаваме:

$$(x-\lambda)(x-\overline{\lambda}) = x^2 - 2xp\cos\varphi + p^2$$

Идеята, която Обрешков успява да осъществи, води до следното твърдение:

Ако $f(x)$ е полином от n-та степен с реални коефициенти, а V е броят на вариациите му и ако $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{n+2-V}$, то броят на вариациите на полинома

$$f(x)(x^2 - 2xp\cos\varphi + p^2)$$

е равен на $V+2$ или е с четно число по-голям.

На читателя веднага ще направи впечатление аналогията на това твърдение с лемата на Зегнер. Но докато доказателството ѝ е твърде елементарно, то, за да стигне до обобщението ѝ, Обрешков проявява находчивост и сръчност, далеч надхвърлящи обикновеното ниво. Съществена роля тук играе установеното от него твърдение, което дава отговор на въпроса за изменението на броя V на вариациите на една редица

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \quad (\alpha_1 \neq 0, \alpha_n \neq 0)$$

от реални числа, ако тя бъде "подложена" на действието на линейно преобразуване от специален вид. По-точно, Обрешков доказва:

Ако $\beta_1, ..., \beta_n$ са числата, определени с равенствата

$$\beta_q = a_q\alpha_{q-1} + b_q\alpha_q + c_q\alpha_{q+1},$$

като $a_q \ge 0, c_q \ge 0, c_1 = c_n = 0 \quad (q = 1, ..., n)$ и ако

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} b_p & c_p & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ a_{p+1} & b_{p+1} & c_{p+1} & ... & 0 & 0 & 0 \\ .... & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{p+q-1} & b_{p+q-1} & c_{p+q-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{p+q} & b_{p+q} \end{vmatrix}$$

то от $(-1)^{q+1}\Delta_{pq} > 0, \; (p = 1, ..., n; q = 0, 1, ..., s), \; s = \min(n-p, n-V-1)$ следва, че редицата $\alpha_1, \beta_2, ..., \beta_n, \alpha_n$ има $V+2$ вариации или с четно число повече.

За трансформацията, която съответства на умножаване с квадратния тричлен $x^2 + 2px\cos\varphi + p^2$ на полином от n-та степен с V вариации, съответната детерминанта Δ_{pq} има вида:

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} -2p\cos\varphi & p^2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -2p\cos\varphi & p^2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -2p\cos\varphi & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2p\cos\varphi \end{vmatrix}$$

Пресмятането ѝ води до израза:

$$\Delta_{pq} = (-1)^{q+1} p^{q+1} \frac{\sin(q+2)\varphi}{\sin\varphi}$$

Оттук следва, че $(-1)^{q+1}\Delta_{pq} > 0$ за $q = 0, 1, 2, ..., n-V$ щом $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{n+2-V}$

Като използва последното твърдение, Обрешков стига до следното интересно обобщение на теоремата на Бюдан-Фурие.

Нека $f(x) = 0$ е алгебрично уравнение с реални коефициенти от n-та степен, $a < b$ са реални числа и $ABCD$ е четириъгълникът в равнината на комплексните числа, симетричен спрямо реалната ос, чиито върхове A и B съвпадат съответно с точките a и b, като ъглите $\angle CAD$ и $\angle CBD$ при тези върхове са съответно равни на $\frac{2\pi}{n - V_a}$ и $\frac{2\pi}{V_b}$. Тогава броят на корените на това уравнение, които лежат в четириъгълника $ABCD$, е равен на $V_a - V_b$ или е с четно число по-малък.

Като се положи тук $a = 0$ и $b = +\infty$, се получава обобщението на Обрешков на теоремата на Декарт.

В по-късните си изследвания Обрешков отново се връща към правилото на Декарт и дава други негови доказателства. Така например в публикацията му *"Обобщение теоремы Декарта о мнимых корнях"* (Доклады Акад. Наук СССР, 65 (1952), 489—492) е доказано следното твърдение:

Ако уравнението $f(x) = 0$ от n-та стенен с реални коефициенти има p корена, чиито аргументи лежат в интервала $-\frac{\pi}{n+2-p} < \varphi < \frac{\pi}{n+2-p}$, то броят на вариациите на коефициентите му е равен на p или е с четно число по-голям.

От тази теорема пак следва обобщеното правило на Декарт.

Работите на Обрешков, свързани с теоремата на Декарт, се посрещат с интерес и предизвикват нови изследвания и резултати. С тях са свързани имената на С. Липка и И. Шоенберг. През 1936 г. последният публикува обобщение на едно следствие от теоремата на Декарт-Обрешков и за уравнения с комплексни коефициенти. Непосредствено след това Обрешков доказва теоремата на Шоенберг в по-обша форма.

Едва ли е възможно да се опише на няколко страници огромното богатство от резултати върху разпределението на нулите на полиномите и рационалните функции, което Обрешков остави. Той с право може да бъде наречен родоначалник на българска школа по разпределението на нулите на полиномите. Работите му в тази област подбуждат към самостоятелни изследвания вече няколко поколения български математици.

През 1963 г., няколко месеца преди неочакваната и непоправима загуба, която българската математическа наука понесе, излязоха от печат монографиите *"Нули на полиномите"* и *"Разпределение и пресмятане на нулите на реалните полиноми"* на акад. Н.Обрешков (втората на немски език, издание на ГДР).

Делото на акад. Н. Обрешков несъмнено принадлежи към съкровищницата на българската научна мисъл и още дълги години ще бъде пример, достоен за подражание.

Петър Русев