Personalia

ВАСИЛ А. ПОПОВ (1942 – 1990)

На 31 май 1990 г. във Филаделфия внезапно почина Васил Атанасов Попов. Той е роден на 14 януари 1942 г. в София, където завърши с отличие средното си образование през 1960 г. През 1962 г. бе приет за студент по физика, а след това и по математика в Софийския университет. Завърши в съкратен срок с отличие Математическия факултет в специализацията по изчислителна математика. От септември 1965 г. до кончината си Васил Попов работи в Института по математика при БАН. Първоначално той бе стажант-сътрудник; научен сътрудник от 1967 г., старши научен сътрудник от 1974 г. Избран бе за професор през 1981 г. и за член-кореспондент на БАН през 1984 г. През 1971 г. Васил Попов защити успешно кандидатска дисертация на тема „Изпъкнали апроксимации", а през 1976 г. стана доктор на математическите науки с дисертационен труд на тема „Прави и обратни теореми в теорията на апроксимациите".

През 1974 г. Съюзът на математиците в България присъди на Васил Попов наградата „Н. Обрешков". Той е лауреат на Димитровска награда за 1978 г. и е носител на медал „1300 години България" за 1981 г. за изключителни постижения в областта на теорията на приближенията.

Васил Попов отрано бе познат и признат и извън границите на нашата страна. Той бе често поканен докладчик на реномирани международни срещи. На два пъти бе гост-професор в САЩ. Смъртта го завари на такъв пост.

Проф. В. Попов бе зам. гл. редактор на *Serdica* и член на редколегията на *Mathematica Balkanica* и на *Approximation theory and its applications.*

Ненавременната му кончина е тежък удар върху българската школа по апроксимации и върху българската математика изобщо. За щастие той не само бе увлечен в своите изследвания, но увлече около себе си множина млади учени, които сами израснаха и ще могат достойно да продължат неговото дело.

* * *

Основните научни интереси и резултати на член-кореспондент Васил Атанасов Попов са в теория на апроксимациите. Той има съществен математически принос в почти всички направления на конструктивната теория на функциите.

В предложения обзор резултатите са разделени на няколко групи: приближаване в хаусдорфова метрика, приближаване с рационални функции и сплайн-функции със свободни възли, усреднени модули на гладкост, приложения в числените методи. Работите са отнесени към отделните групи според основния получен резултат, но те, разбира се, са свързани и с редица работи от останалите групи. Направеното разделяне е само за удобство и не е опит за класификация.

1. Апроксимации в хаусдорфова метрика. Голяма част от работите на В. Попов през периода 1966—1975 година са свързани с апроксимации относно хаусдорфово разстояние. Въведено при приближаването на функции от Бл. Сендов през 1960 г. и изследвано в работите на редица български математици, хаусдорфовото разстояние се явява обобщение на равномерното разстояние.

Един от първите резултати на В. Попов, получен още в дипломната му работа, е пренасянето в случая на много променливи на основната теорема за хаусдорфови приближения на Бл. Сендов. По-късно той уточнява този резултат в [2, 6], като съществено намалява константата. В [33] е показано, че добре известният „ефект на Николски" е в сила и при приближаване с алгебрични полиноми относно хаусдорфова метрика. Същият ефект се наблюдава и при апроксимиране на монотонни функции с монотонни полиноми [38]. Съвместно с Т. Боянов, В. Попов пресмята [7] точните стойности на напречниците на Колмогоров на пространството от непрекъснати функции в хаусдорфова метрика.

Един от най-хубавите резултати за хаусдорфови приближения е намирането на асимптотически точната константа в оценката на най-добрите приближения [30]: Ако B е множеството от функции, които са равномерно ограничени в интервал $[a, b]$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in B} \{n(\ln n)^{-1} E_{n,r}(f)\}=(b-a)/2,$$

където $E_{n,r}(f)$ е най-доброто приближение в хаусдорфова метрика на функцията f с алгебрични полиноми от n-та степен. В периодичния случай (ако f е 2π-периодична функция и приближаваме с тригонометрични полиноми) съответната граница е 1.

Основно значение за конструктивната теория на функциите има теоремата на Джексън (количествено обобщение на класическата теорема на Вайерщрас): За всяка 2π-периодична функция f е изпълнено

$$E_n^*(f)_\infty \leqq c\,\omega(f,1/n)_\infty,$$

където $\omega(f,\delta)_\infty = \sup\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \leqq \delta\}$ е модулът на непрекъснатост на функцията f, а $E_n^*(f)_\infty$ е най-доброто приближение в равномерна метрика на функцията f с тригонометрични полиноми от степен n. В. Попов и Бл. Сендов обобщават това твърдение [35] за най-добрите приближения $E_{n,r}^*(f$ относно хаусдорфова метрика при произволно положително α:

$$E_{n,r}^*(f) \leqq c(\alpha n)^{-1} \max\{\ln(\alpha n\,\omega(f, n^{-1})), 1\}.$$

Аналогично твърдение е доказано и при приближаване с алгебрични полиноми на функции, дефинирани в краен интервал.

Една от основните теми в конструктивната теория на функциите е определянето на порядъка на най-добро приближение на даден клас от функции. За класа на равномерно ограничените изпъкнали функции В. Попов [48] получава, че порядъкът на най-добро хаусдорфово приближение с алгебрични полиноми е n^{-1}, а не $(\ln n)\,n^{-1}$, както следва от общата оценка. За този клас е показано [24, 32], че най-добрите хаусдорфови рационални (или сплайн) приближения са с един порядък по-добри от хаусдорфовите полиномиални приближения или равномерните рационални приближения. Друг един клас, изследван от В. Попов, е класът от функции с ограничена вариация. За всяка индивидуална функция от този клас най-доброто приближение с полигони е $o(n^{-1})$ [17], а най-доброто приближение с рационални функции на целия клас е $o(n^{-1})$ [46, 65].

В [4] се обобщава теоремата на Коровкин за приближаване с линейни оператори относно хаусдорфово разстояние, а в [21, 41] се обобщава теоремата на Поповичиу за полиномите на Бернщайн и Вале-Пусен. Друг резултат е намирането [8, 16] на достатъчни условия за хаусдорфова сходимост на производните на оператори към производните на функцията. Нека отбележим, че повечето известни оператори (Бернщайн, Фейер, Джексън, Вале-Пусен, Поасон) удовлетворяват тези условия.

Изброените теореми са известни като прави теореми в конструктивната теория на функциите. Класическо обратно твърдение в теорията на равномерните приближения е теоремата на Бернщайн: ако $\{\varepsilon_n\}$ е монотонно намаляваща редица от числа, която клони към нула, то съществува непрекъсната функция f такава, че $E_n(f)=\varepsilon_n$. Същата теорема е вярна при доста общи предположения за приближаващия апарат и в произволно нормирано пространство. В. Попов [22] установява, че аналогична теорема не е в сила за приближение в хаусдорфова метрика — случай на метрично ненормируемо пространство. Много технично той показва, че съществува монотонно клоняща към нула редица от числа $\{\varepsilon_n\}$, $0 \leqq \varepsilon_n \leqq (\ln n)\,n^{-1}$, за която не съществуват интервал и ограничена функция f, дефинирана в него, такива че $E_{n,r}(f)=\varepsilon_n$.

Един друг кръг от въпроси, разглеждани от В. Попов, е приближаване относно хаусдорфово разстояние на криви в равнината чрез полигони и чрез полиномиални криви. В [5, 14] е намерена точната асимптотика на най-доброто приближение с изпъкнали n-ъгълници на дадена изпъкнала затворена крива, както и на целия клас от криви с фиксирана дължина. В [18] за класа от ректифицируеми криви

с фиксирана дължина е показано, че най-добрите полиномиални приближения имат порядък n^{-1}, докато за индивидуална крива от този клас оценката е $o(n^{-1})$.

Апроксимация с рационални функции и сплайн-функции със свободни възли. Може би най-ярко силната математическа интуиция на В. Попов се проявява в областта на най-добрите приближения със сплайни със свободни възли и с рационални функции. Интересът му към тази област започва още преди написването на кандидатска дисертация [29] и продължава до края на живота му.

Съвместно с Г. Фройд [9, 20] В. Попов получава, че най-доброто равномерно приближение със сплайни на функции с ограничена вариация на k-та производна има порядък n^{-k-1}. В [45] е доказано, че най-доброто равномерно приближение със сплайни от k-ти ред с n свободни възела на една функция f се оценява отгоре с $1/n$ от най-доброто L_1 приближение на производната. Едно следствие от този резултат е, че ако f има абсолютно непрекъснати производни до ред $k-1$, то това приближение за индивидуална функция е $o(n^{-k})$. За целия клас от такива функции оценката е $o(n^{-k})$ [20] и е точна [26]. Това е първият получен „o малко" ефект за индивидуална функция при равномерни приближения със сплайни, който е характерен за рационалните и сплайн приближения.

В цяла серия от работи [19, 36, 49, 55] В. Попов получава характеризация на най-добрите приближения със сплайни със свободни възли чрез подходящо дефинирани модули.

Едно от първите неравенства, свързващи приближенията със сплайни със свободни възли и приближенията с рационални функции в равномерна метрика, е получено от В. Попов, който в [37, 55] показва, че за порядъци $n^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, сплайните не са по-лош апарат за апроксимация от рационалните функции.

Проблемът за получаване на точна оценка за равномерните приближения $R_n(f)_\infty$ с рационални функции от n-ти ред на функции f с ограничена вариация на производната, подобна на тази при сплайните, е атакуван дълги години от множество математици като Туран, Сюч, Фройд, Буланов, Гончар, Сабадош. След редица работи [39, 40, 43] точната оценка

$$R_n(f)_\infty \leq c_k n^{-k-1} \vee f^{(k)},\ k \geq 1,$$

е получена от В. Попов [52, 56, 65] по един забележителен метод. Този метод позволява по-късно да бъдат доказани цяла серия от оценки за приближения с рационални функции. Резултатът от [56] доказва и хипотезата на Нюман: за всяка функция $f \in \mathrm{Lip}\ 1$ е изпълнено $R_n(f)_\infty = o(n^{-1})$. За този резултат авторът на хипотезата нарича В. Попов „briliant young bulgarian mathematician".

В [60] е получена точната оценка отгоре $o(n^{-1})$ за равномерните приближения с рационални функции на класа от равномерно ограничени изпъкнали функции, както и съответния „o-малко ефект" за индивидуална функция.

В [71] е получен аналог на теоремата на Джексън за рационални приближения:

$$R_n(f)_\infty \leq c_k n^{-1} \omega_k(f', n^{-1})_p \text{ при } p>1;$$

$$R_n(f)_\infty \leq c_k n^{-2} \omega_k(f'', n^{-1})_1.$$

Разкриването на връзката между последните два резултата е направено в [86] чрез т. нар. диагонална интерполационна теорема. В. Попов с присъщата си интуиция точно долавя, че въпреки съществената разлика от „линейните" апроксимации (като тези с полиноми, сплайни с равномерни възли, линейни положителни оператори и др.), при „нелинейните" апроксимации (сплайни със свободни възли, рационални функции) също е възможна интерполация. Използвайки подходящи неравенства от тип на Джексън и Бернщайн, в последните си работи [92, 94, 96, 98, 100] той развива ясна схема за получаване на съответните интерполационни резултати.

Интерес будят изследванията на В. Попов по интерполация на апроксимационни пространства A_σ^α, състоящи се от функции, чиито най-добри L_p приближения с даден апарат в дадено пространство имат, грубо казано, порядък $o(n^{-\alpha}(\ln n)^{-1/\sigma})$. В [94] е доказано съвпадение на апроксимационните пространства, породени от приближенията в L_p с рационални функции и тези със сплайни от ред k със свободни възли, когато $k>\alpha$. В специалния случай $1/\sigma=\alpha+1/p$ там е получено, че същите апроксимационни пространства съвпадат с пространствата на Бесов $B_{\sigma\sigma}^\alpha$.

В. Попов и ДеВор [92] обобщават дефиницията на сплайни със свободни възли в d-мерния случай. За сплайни, които са на части константи, те доказват, че апроксимационните пространства се получават чрез интерполация между L_p и пространства на Бесов. В специалния случай $1/\sigma=\alpha/d+1/p$, те получават, че съответното апроксимационно пространство $A_\sigma^{\alpha/d}$ е пространството на Бесов $B_{\sigma\sigma}^\alpha$.

Голяма част от посочените резултати са намерили място в монографията на В. Попов и П. Петрушев „Рационални приближения на реални функции" [97]. Тя съдържа най-пълното до момента изложение на всички основни въпроси и резултати, породени при приближаването на функции на реална променлива с рационални функции.

3. Усреднени модули на гладкост. В поредица от работи В. Попов получава характеризация на най-добрите едностранни приближения с тригонометрични полиноми или със сплайни с фиксирани възли. За тази цел той въвежда [58] усреднените модули на гладкост като нова характеристика за ограничени измерими функции f:

$$\tau_k(f, \delta)_{p[a, b]} := \| \sup \{ | \Delta_h^k f(t) | : t, t+kh \in [x-\delta k/2, x+\delta k/2] \cap [a, b] \} \|_p$$

(естествено $k, \delta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$), както и тяхното обобщение за многомерния случай [77].

Подобен тип характеристики са разглеждани по-рано от Бл. Сендов, П. П. Коровкин, Е. П. Долженко и Е. А. Савастьянов, но изграждането на цялостна теория, включваща техните свойства, връзките им с други характеристики, описание на пространства, породени от тях, получаването на разнообразни приложения, бе осъществено от В. А. Попов и неговите ученици. Тези характеристики неочаквано намериха естествено приложение в редица други области на теория на апроксимациите и числените методи (вж. т. 4). Монографията на Бл. Сендов и В. Попов [78], преведена на руски [78 б] и английски [78 в], третира всички тези резултати от единна гледна точка.

По конкретно в термините на усреднените модули от В. Попов са получени прави и обратни теореми за най-добрите едностранни приближения с тригонометрични полиноми и със сплайн-функции с равномерни възли [58, 59, 62, 64, 66, 69], количествена теорема от тип на Коровкин [76], прави теореми за приближаване в интегрални метрики и определяне класовете на насищане на дискретни оператори [70, 85]. Някои от тези резултати са обобщени и в многомерния случай [77, 80, 95]. За най-добрите едностранни приближения $E\tilde{n}(f)_p$ в L_p на 2π-периодичната функция f с тригонометрични полиноми от степен n в [62, 58] е доказано:

$$K\tilde{n}(f)_p \leq c_k \tau_k(f, n^{-1})\, p;$$

$$\tau_k(f, n^{-1})p \leq c_k n^{-k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E\tilde{\nu}(f)p.$$

В редица работи [79, 81, 82, 84, 91] В. Попов изучава систематически свойствата на пространствата, породени от усреднените модули на гладкост. С цел изясняване на техните интерполационни свойства, установяване на теореми за влагане в пространствата на Бесов и Соболев и за получаване на еквивалентни норми, той въвежда следния едностранен K-функционал

$$\tilde{K}(f, t)_p : \inf \{ \| h-g \|_p + t \| g^{(k)} \|_p + t \| h^{(k)} \|_p : g, h \in W_p^k, g \leq f \leq h \}$$

и доказва [84, 91] еквивалентността му с усреднения модул на гладкост:

$$c_k^{-1} \tau_k(f, t)_p \leq \tilde{K}(f, t^k) \leq c_k \tau_k(f, t)_p.$$

В. Попов забелязва [80, 91], че в многомерния случай при определени стойности на метричния параметър p максималният порядък δ^k на клонение към нула на успоредните модули на гладкост $\tau_k(f, \delta)_p$ се получава за функции от пространства на Соболев с доминираща смесена производна. Това налага особена дефиниция на едностранния K-функционал в многомерния случай [91], различна от тази на съответния K-функционал без ограничение.

4. Приложения в числените методи. Сериозни са приносите на В. Попов в областта на числените методи. Като оставим настрана, че близо 15 години студентите във факултета по математика и информатика се обучават по дисциплината „Числени методи" по учебника на Сендов и Попов [53, 63], трябва да се отбележат разностранните му приноси в теорията и практиката. Споменава се и практиката, тъй като В. Попов (един от първите в България) още през 60-те години използува възможностите на компютрите за числено моделиране на приложни задачи от теория на еластичността — като изчисляване на тунелни облицовки [34], пресмятане на напреженията в тунелните конструкции [3], установяване на дозата при вътретъканната гама-терапия [10]. Комбинирайки големите си теоретически познания с добро владеене на техниката за програмиране (някои от проблемите са решавани на Асемблер), получените резултати впечатляват специалистите в съответните области.

И все пак силата на В. Попов е най-ясно изразена в теорията на числените методи. В своите работи той подобрява известните досега оценки за остатъчния член на такива класически и широко използувани апроксимационни схеми, като квадратурните формули на Нютон—Коутс [54], метода на крайните елементи [73] и сплайн колокацията [51, 75], както и други методи за решаване на диференциални и интегрални уравнения [78, 83, 87, 89]. Основен инструмент за получаване на тези резултати са усреднените модули на гладкост, описани по-горе. Главните идеи на тези резултати могат да бъдат групирани в две направления:

— Получаване на оценки за изброените методи без допълнителни условия за гладкост на решението, освен условията, които са необходими за дефинирането на задачата. При условие, че решението при-

тежава съответни производни, от доказаните оценки като пряко следствие се получават известните класически порядъци за сходимост на приближеното към точното решение;

— от намерените оценки и свойствата на усреднените модули на гладкост следват по-слаби условия за сходимост от известните за редица числени методи (крайни елементи, квадратури и др.). Показано е, че за определени порядъци на сходимост условията за гладкост на решението могат да бъдат отслабени — например [75], при решаване на граничната задача за диференциално уравнение от втори ред с консервативна диференчна схема за порядък на сходимост h^2 е достатъчно коефициентите да са с ограничена вариация, което е значително по-слабо от класическото изискване коефициентите да бъдат функции от C^2 в краен брой интервали.

Нов подход в теорията на числените методи са съвместните резултати на В. Попов и В. Л. Макаров по намиране на прави и обратни теореми по подобие на аналогични резултати в теорията на приближенията. Използувайки апарата на пространствата на Бесов и получените оценки за диференчните методи чрез усреднените модули на гладкост, за граничната задача от втори ред, за двумерната задача на Дирихле и за сплайн колокацията при решаване на интегралното уравнение на Фредхолм в [99] е получен резултат от следния тип: необходимото и достатъчно условие точното решение на коя да е от горните задачи да принадлежи на определен клас от функции е грешката на числения метод да има даден порядък.

Научните интереси на В. Попов се простират далеч извън рамките на посочените четири области. Нека отбележим неговите изследвания по локални приближения [28, 42, 44], параметрични приближения [57], числено пресмятане на корените на алгебрични уравнения [88], неравенства за вероятностни разпределения [93]. Добре известен бе постоянният му интерес към аналитичната теория на числата. Благодарение на неговите усилия у нас се създадоха млади специалисти в тази област.

Най-голямо значение за родната наука наред с блестящите резултати, описани по-горе, има приносът на Васил Попов за развитието и утвърждаването на българската школа по теория на апроксимациите. Благодарение на всеотдайността си, той остави много ученици, получили частица от безкрайната му любов към математиката.

А. С. Андреев, К. Г. Иванов, Е. С. Москона, С. П. Ташев, В. Х. Христов