ГОДИШНИКЪ НА УНИВЕРСИТЕТА СВ. КЛИМЕНТЪ ОХРИДСКИ—СОФИЯ
ОФИЦИАЛЕНЪ ОТДѢЛЪ — 1943/1944
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ SAINT CLÉMENT D'OCHRIDA À SOFIA
PARTIE OFFICIELLE — 1943/1944

МАТЕМАТИКАТА И НЕЙНОТО ЗНАЧЕНИЕ ЗА ЧОВѢШКАТА КУЛТУРА

АКАДЕМИЧНА РЕЧЬ, ПРОИЗНЕСЕНА ОТЪ РЕКТОРА НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТЪ ПРОФЕСОРЪ Д-РЪ **ЛЮБОМИРЪ ЧАКАЛОВЪ** НА УНИВЕРСИТЕТСКИЯ ПРАЗДНИКЪ „СВ. КЛИМЕНТЪ ОХРИДСКИ"
— 8. ДЕКЕМВРИЙ 1943 ГОДИНА

СОФИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКА ПЕЧАТНИЦА
1944

МАТЕМАТИКАТА И НЕЙНОТО ЗНАЧЕНИЕ ЗА ЧОВѢШКАТА КУЛТУРА

АКАДЕМИЧНА РЕЧЬ, ПРОИЗНЕСЕНА ОТЪ РЕКТОРА НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТЪ ПРОФЕСОРЪ Д-РЪ **ЛЮБОМИРЪ ЧАКАЛОВЪ** НА УНИВЕРСИТЕТСКИЯ ПРАЗДНИКЪ „СВ. КЛИМЕНТЪ ОХРИДСКИ“ — 8. ДЕКЕМВРИЙ 1943 ГОДИНА

Ваше Величество,
Ваши Царски Височества,
Господа Регенти,
Ваши Високопреосвещенства,
Господа Министри,
Уважаеми гости и колеги,
Драги студенти,

Едва ли има просвѣтенъ човѣкъ, който да не е запознатъ макаръ и повръхностно съ това, което дължимъ на математиката за изграждането на съвременната вещественa култура. Ние живѣемъ въ една епоха, която може да се нарече съ право епоха на природнитѣ науки и на техниката. Благодарение на научнитѣ открития въ областьта на физиката, природнитѣ науки и техниката, ние успѣхме да овладѣемъ законитѣ, на които се подчиняватъ природнитѣ стихии, криещи въ себе си неизчерпаеми източници на енергия, да ги обуздаемъ и впрегнемъ въ полезна за насъ работа. Свидетели сме на грамадния напредъкъ, който направиха въ наше време физиката, химията, астрономията и други положителни науки. Така, новитѣ постижения на физиката ни позволиха да вникнемъ дълбоко въ структурата на материята и се доближимъ до идеала на алхимицитѣ за превръщане на веществото; по този начинъ физиката съ своитѣ методи навлѣзе въ една областъ, която по-рано бѣше запазенъ периметъръ на химията. Астрономията отъ своя страна отбеляза такива успѣхи, че тя е въ състояние да наблюдава и предсказва движението и да опредѣля състава на небеснитѣ тѣла, отдалечени отъ насъ на разстояния, които се измѣрватъ съ стотици хиляди свѣтлинни години и за чиято огромность нашитѣ чувства не могатъ да ни дадатъ и най-малка идея. Още по-очебийни за всички ни сѫ гигантскитѣ завоевания на техниката въ всички прояви на човѣшката дейность, които въ нѣкои отношения надминаха далече фантастичнитѣ блѣнове на Жюлъ Верна и Фламариона.

Достатъчно е да споменемъ тукъ за епохалното откритие на електромагнитнитѣ вълни, чието постепенно усъвършенствуване ни даде възможность да се съобщаваме по единъ удобенъ и бързъ начинъ презъ хиляди километри, използувайки за проводникъ етера. Усъвършенствуването пъкъ на газовия моторъ ни даде възможность да завладѣемъ пакъ въ наше време въздушния океанъ чрезъ летателнитѣ машини, като най-удобни срѣдства за съобщения — завоевание, което за човѣшкия родъ, може би, има сѫщото значение, както Прометеевия даръ — огъня. Ние живѣемъ въ една наистина забележителна епоха отъ човѣшката история, когато човѣкъ става пъленъ господарь на природнитѣ сили, подчинението на които му открива необозрими възможности. Всички тѣзи постижения се дължатъ на математическитѣ методи на изследване, легнали въ основата на поменатитѣ природни науки. И наистина, какво би постигнала инженерската наука безъ помощьта на математиката, която ѝ дава единствено възможность да пресмѣта отнапредъ годностьта на техническитѣ постройки; колко безпомощенъ би се почувствувалъ инженерътъ-земемѣръ, ако не си служеше съ математиката при прокарването на десетки километри дълги тунели презъ планинскитѣ масиви? Какво биха били безъ нея физиката и астрономията, теоретичнитѣ основи на които не сѫ нищо друго освенъ приложения на математиката? Всичко това е достатъчно, за да ни наведе на мисъльта, че цѣлата съвременна култура, доколкото тя почива върху опознаването и оползотворяването на природата, е основана върху математическата наука. Това убеждение е разпространено впрочемъ и между нематематическитѣ срѣди и мѫчно ще намѣрите въ днешно време образованъ човѣкъ, който да не храни особена почить къмъ математиката като наука, която ни дава възможность да проникнемъ до най-съкровенитѣ тайни на природата, да откриемъ правилность и закономѣрность въ най-капризнитѣ на гледъ явления и да използуваме тѣзи наши познания, за да подчинимъ природнитѣ сили на нашата воля.

Ето какъ скицира основнитѣ начала на природознанието единъ отъ създателитѣ на съвременната физика, Галилео Галилей: „Истинската философия е написана въ тази величествена книга, която стои постоянно открита предъ нашитѣ очи — Вселената; но тя не може да бѫде разбрана, ако понапредъ не се научимъ да разбираме езика и буквитѣ, на които тя е написана. Нейниятъ езикъ е езикътъ на математиката, а буквитѣ ѝ сѫ трижгълници, окрѫжности и други математически фигури“. А великиятъ нѣмски мислитель Кантъ казва на едно мѣсто въ своитѣ Метафизични начала на природнитѣ науки: „. . . понеже въ всѣка отдѣлна природна наука се срѣща дотолкова собствена наука, доколкото въ нея се намира априорно познание, то природознанието ще съдържа само дотолкова собствена наука, доколкото се прилага въ него математиката“[1].

Азъ зная, че има мнозина, които, ако и да сж съгласни напълно съ изложеното дотукъ, все пакъ сж наклонни да посрещнатъ съ скептицизъмъ идеята за ползата, която принася напредъкътъ на природнитѣ науки за доброто на човѣчеството и за издигането му надъ животинското състояние. Не живѣемъ ли тъкмо сега въ една епоха, въ която всички придобивки на природнитѣ науки и техниката се използуватъ за усъвършенствуване на машинитѣ за воюване и за взаимно изтрѣбление? Каква полза за човѣшкия родъ отъ завоюването на необятния въздушенъ океанъ чрезъ откриването и усъвършенствуването на летателнитѣ машини, когато тѣ служатъ сега само за разруха и опожаряване на цъвтещи градове съ милионни населения и съ културни ценности, създавани и трупани отъ столѣтия насамъ? Не бѣше ли по-добре за човѣчеството да бѣше лишено отъ възможностьта да строи тѣзи съвършени машини, щомъ то ги употрѣбява почти изключително за изтрѣбление на невинни човѣшки сжщества и културни ценности? Наистина, трагичнитѣ събития, които преживѣваме днесъ, сж тъй обезкуражителни, че не могатъ да не ни наведатъ на подобни мрачни мисли. Ала когато подлагаме на преценка една наука съ хилядилѣтна история, ние трѣбва да вършимъ това не едностранчиво и съ огледъ на даденъ исторически моментъ, а тъй да се каже отъ историческа перспектива.

Сами по себе си откритията на науката и придобивкитѣ на техниката не могатъ да бждатъ морални или аморални. Тѣ могатъ да бждатъ използувани за добра или пакостна цель, споредъ това, въ какви ржце биха попаднали. Въ този смисълъ, напримѣръ, откритието на нитроглицерина не е неморално, макаръ и то да е струвало на човѣшкия родъ неизброими жертви. Но нима злоупотрѣбления ставатъ само съ придобивкитѣ на тъй нареченитѣ положителни науки? Тъкмо времената, въ които живѣемъ, ни даватъ изобилни примѣри за явни злоупотрѣбления съ тъй нареченитѣ хуманитарни науки. Историята, етнографията, та дори и науката за нравственостьта се изопачаватъ понѣкога тъй ловко, че съ привидно научни доводи се защищаватъ и обосноваватъ явно погрѣшни и противонаучни заключения. Всичко това се върши отъ люде, които служатъ на интереси, чужди на интереса на научната истина. И за тѣхната пакостна дейность ние нѣмаме право да винимъ самата наука или да съжаляваме за нейнитѣ успѣхи, тъй както нѣмаме право да унищожаваме благата само затова, защото нѣкои злоупотрѣбявали съ тѣхъ.

---

[1] Em. Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft (Vorrede).

Дотукъ азъ засегнахъ само онази часть отъ моята тема, която е по-достжпна за широката публика, а именно: значението на математиката за природнитѣ науки, а оттамъ и за веществената култура на човѣчеството. Достжпна е тя затова, защото резултатитѣ отъ приложенията на природнитѣ науки биятъ тъй да се каже въ очитѣ на всѣки културенъ човѣкъ. Не тъй стои, обаче, въпросътъ за тъй наречената чиста математика, т. е. за оная часть отъ математиката, чиито изследвания иматъ за цель да задоволятъ нашата чиста любознателность, безъ огледъ на това, дали резултатитѣ отъ тѣзи изследвания биха могли да принесатъ нѣкому полза въ обикновения смисълъ на думата. Още старитѣ гърци, за които математиката е била нераздѣлна часть отъ философията, сж си поставили за идеалъ да изградятъ тогавашната математика като дедуктивна наука, чиито истини да се извеждатъ по пжтя на логическата дедукция отъ известенъ брой основни понятия и основни положения, наречени аксиоми. По този начинъ още старитѣ гърци туриха началото на чисто умозрителни спекулации, на едно по-голѣмо задълбочаване въ математическитѣ теории, безъ огледъ на тѣхнитѣ приложения. Цельта на тѣзи спекулации е била да задоволи потрѣбностьта на мислещия човѣкъ отъ подлагане на критиченъ анализъ и отъ привеждане въ хармониченъ редъ и система понятията на математическата наука, придобити или изведени отначало по емпиричень пжть.

Общоизвестно е, че математиката, подобно на природнитѣ науки, дължи своя произходъ на практическитѣ нужди на човѣка и на човѣшкитѣ общества. Броенето и мѣренето сж действия, свързани съ конкретни представи отъ практическия животъ. Така, на времето старитѣ египтяни сж били принудени да се занимаватъ съ свойствата на геометричнитѣ фигури поради необходимостьта да размѣрватъ наново обработваната отъ тѣхъ земя, заливана периодически отъ водитѣ на Нилъ; при това тѣхнитѣ учени-жреци сж прилагали опитно установени отъ тѣхъ геометрични правила, нѣкои отъ които сж били само приблизително вѣрни. Ако можемъ да вѣрваме на преданието, дори и прочутата Питагорова теорема е била открита по емпириченъ пжть; при своето пжтуване въ Египетъ Питагоръ узналъ именно, че трижгълникъ съ страни 3, 4 и 5 линейни единици е правожгъленъ и този емпирично установенъ фактъ отъ египтянитѣ, съпоставенъ съ обстоятелството, че сборътъ отъ квадратитѣ на числата 3 и 4 е равенъ на квадрата на числото 5, е навелъ прочутия грѫцки философъ на идеята за неговата теорема. По този начинъ виждаме, че основнитѣ математически истини сж били открити чрезъ наблюдение и опитъ. Впрочемъ, сжщото нѣщо важи и за нѣкои съвременни математически дисциплини, на първо мѣсто за теорията на числата, при все че тя за сега нѣма никакъвъ допиръ съ физиката и природнитѣ науки. И наистина, историята на тази сравнително млада наука ни учи, че много нейни теореми сж били установени опитно, чрезъ налучкване, преди да бждатъ доказани. Такъвъ е случаятъ съ тъй наречената последна теорема на Фермà, която и до день днешенъ не е доказана въ нейната най-голѣма общность и която, следователно, още не е добила правото да се нарече теорема. Цельта на една наука, обаче, не може да бжде само натрупването на отдѣлни факти, а систематизирането на събрания материалъ, откриването на закономѣрности, причинни връзки и хармония въ привидния хаосъ — нѣщо, което ни дава възможность да се ориентираме лесно въ лабиринта на събрания фактически материалъ. Това важи особено за математиката, която заема най-малко отъ външния свѣтъ. Ето защо въ нашата наука най-напредъ индуктивниятъ периодъ е билъ последванъ отъ дедуктивенъ периодъ, презъ който математицитѣ сж се стремили да дадатъ окончателенъ видъ на основнитѣ положения тъй, че да могатъ да изградятъ върху така създадената основа, по пжтя на логическата дедукция, цѣлата математическа наука. Най-величественъ опитъ въ това направление представя съчинението „Елементи" на Александрийския ученъ Евклидъ, живѣлъ въ III вѣкъ преди Христа. Въ това свое съчинение гениалниятъ представитель на Александрийската школа си бѣ поставилъ за цель да освободи геометричнитѣ понятия отъ чувственитѣ представи за тѣхъ, като отдѣли това, което може да бжде доказано по логически пжть, отъ онова, което бива възприето отъ сетивата. Известно е, че и до днесъ ученици и учители въ гимназията си иматъ доста неприятности съ евклидовото доказателство на теоремата, споредъ която всѣка страна въ трижгълника е по-малка отъ сбора на останалитѣ две. Ако такива очевидни нѣща се нуждаятъ отъ доказателство, се пита въ недоумѣние ученикътъ, тогава какво не трѣбва да доказваме! И ученикътъ е напълно правъ, ако учительтъ предварително не си е далъ трудъ да изясни становището, на което застава Евклидъ и цената, която добива въпросната теорема, когато бива доказана по логически пжть, независимо отъ всѣкакви нагледни представи и антропоморфични схващания. Интересно е да се забележи, че Евклидовото становище не винаги е било схващано и преценявано правилно не само отъ неговитѣ коментатори, но и отъ нѣкои съвременни философи. Така, Шопенхауеръ въ първия томъ на своето съчинение „Свѣтътъ като воля и представа" упрѣква Евклида въ това, че той прави голѣми усилия, за да отхвърли въ геометрията присжщата ѝ и близка очевидность на истинитѣ и да я замѣни съ логичната очевидность. Подобно отбѣгване отъ геометричната нагледность, която се налага отъ само себе на нашитѣ сетива (главно на осезанието и зрението), Шопенхауеръ уприличава на това, да предпочетемъ да си отрѣжемъ краката, за да ходимъ после съ патерици, или пъкъ, подобно на принца отъ Гьотевия „Триумфъ на чувствителностьта“, да предпочитаме хубавитѣ театрални декори предъ красотата на самата природа. Азъ съмъ убеденъ, че нѣма да се намѣри съвременenъ ученъ, който да сподѣля това схващане на Шопенхауера, особено като се има предъ видъ, колко повръхностни сѫ били неговитѣ познания изъ областьта на елементарната математика на Евклида.

Съвременнитѣ математици знаятъ много добре научната стойность на геометричната или физическата нагледность и затова я отричатъ напълно като срѣдство за доказване. „Очевидностьта“, къмъ която водятъ нашитѣ сетива, може да ни доведе до съвършено погрѣшни заключения, ако не бѫде подложена на логически анализъ. За да се види, доколко можемъ да се уповаваме на сетивната очевидность, достатъчно ще бѫде да припомнимъ тукъ погрѣшнитѣ представи за въртенето на небесната сфера около насъ, за сѫществуването на абсолютно „нагоре“ и абсолютно „надолу“ — представи, отъ които човѣшкиятъ духъ успѣ да се освободи едва въ поново време, и то следъ тежка борба съ срѣдновѣковното невежество. Сега математицитѣ не търсятъ да видятъ, а да разберaтъ.

Ето защо становището на Евклида, за което споменахме по-горе, е възприето сега въ цѣлата съвременна математика. Строго взето, опитътъ на Евклида да построи геометрията върху принципитѣ на логическата дедукция, съдържа много празднини и дори грѣшки, ако го преценяваме отъ съвременно гледище. Но този опитъ е забележителенъ не толкозъ по постигнатитѣ резултати, колкото по това, че той ни завеща една програма, къмъ реализирането на която трѣбва да се стремимъ, и то не само въ геометрията. Становището на Евклида биде разбрано и правилно оценено едва въ по-ново време. За да поясня тази си мисъль, азъ ще се спра за малко на прочутата проблема за успореднитѣ прави, която е занимавала умоветѣ на математицитѣ отъ дълбока древность, та дори и до наши дни. Още преди повече отъ две хиляди години Евклидъ е ималъ гениалната интуиция да провъзгласи за аксиома следното геометрично предложение: Ако въ една равнина сѫ дадени права и точка вънъ отъ нея, то презъ точката минава само една права, която лежи въ сѫщата равнина и не пресича дадената права. Провъзгласяването на това предложение за аксиома значи, че то не подлежи на доказване. Естествено е да се запитаме, по какви пѫтища на познанието Евклидъ е достигналъ до тази отъ никого неоспорвана истина. Явно е, че по пѫтя на опита тя не би могла да бѫде установена, защото на практика ние не можемъ да продължаваме неограничено две прави, та да се убедимъ по този начинъ, че тѣ не се пресичатъ. Това обстоятелство именно е накарало математицитѣ да се опитатъ да докажатъ логически въпросното предложение на Евклида възъ основа на останалитѣ геометрични аксиоми, т. е. да установятъ, че то е теорема, а не аксиома. Всички тѣхни опити сѫ останали, обаче, напраздни или илюзорни. Интересно е да се забележи тукъ, че Ем. Кантъ, бидейки самъ математикъ и държейки смѣтка за тѣзи напраздни опити, е дошълъ до убеждението, че тукъ имаме работа съ едно синтетично сѫждение априори, както се изразява той, т. е. че геометричната истина, изразена чрезъ въпросната Евклидова аксиома, представя нѣщо априорно, произтичащо отъ чистия разумъ и независимо отъ всѣкакъвъ опитъ. Развоятъ на математиката презъ миналия вѣкъ дойде да опровергае напълно този възгледъ на Кьонигсбергския философъ за аксиомитѣ на геометрията изобщо. Решителенъ ударъ на този възгледъ нанесе гениалното откритие на руския математикъ Н. Лобачевски, споредъ което сѫществува друга геометрия, въ която споменатата по-горе Евклидова аксиома не е въ сила, а е замѣнена съ друга, сѫщо тъй съвмѣстима съ останалитѣ аксиоми на геометрията. Тази аксиома на Н. Лобачевски може да се изрази въ следната достѫпна форма: Ако въ една равнина сѫ дадени права и точка вънъ отъ нея, то презъ точката минаватъ безбройно много прави, които лежатъ въ сѫщата равнина и не пресичатъ дадената права. Откритието на Лобачевски представя истински триумфъ на абстрактната мисъль надъ сетивнитѣ срѣдства на познание. Извънредно интересенъ е пѫтьтъ, по който Лобачевски е достигналъ до това свое откритие. Както Колумбъ е предприелъ своето пѫтуване съ цель да намѣри по-удобенъ пѫть за Индия, а не за да открие новъ материкъ, тъй и Лобачевски си е поставилъ отначало за цель да докаже по непрѣкъ начинъ XI Евклидова аксиома за успореднитѣ прави, вѣрвайки, че ще дойде до противоречие, ако допустне, че тя не е вѣрна. Следъ нѣколко несполучливи опита въ тази посока, у него постепенно се е затвърдило убеждението, че въ това допускане нѣма нищо абсурдно, макаръ и да е трѣбвало да насилва и изкривява „правитѣ линии" въ чертежитѣ, за да съгласува своитѣ смѣли логични дедукции съ общоприетата зрителна представа за правата линия. Една тънка логична интуиция, подкрепена отъ изведенитѣ отъ него формули на хиперболичната тригонометрия, му е подсказвала, че той е на правъ пѫть. Заслужава, наистина, учудване онази сигурность и смѣлость, съ която той е строилъ камъкъ по камъкъ своята величествена „Пангеометрия", особено като се има предвидъ, че, строго взето, нищо не му е давало основание да бѫде напълно увѣренъ, че неговитѣ изводи нѣма да доведатъ найсетне до противоречие. Едва нѣколко десетилѣтия по-късно Белтрами и следъ него Кейлей, Клайнъ, Поанкаре и др. попълниха тази празднина, като доказаха, тъй да се каже, съ нагледни модели, че хиперболичната геометрия на Лобачевски също тъй не съдържа противоречие, както и Евклидовата.

Азъ се спрѣхъ малко по-подробно на този въпросъ, за да подчертая, че епохални научни открития се дължатъ понѣкога на недовѣрие въ оная очевидность, къмъ която ни водятъ сетивнитѣ представи за нѣщата.

Разбира се, всички тѣзи умствени спекулации иматъ предимно философско-научно значение, но тѣ не губятъ своята цена, дори ако бѣхме сигурни, че нѣма да иматъ приложение въ природнитѣ науки. „Математиката", казва Поанкаре, „граничи едновременно съ философията и съ физиката и ние трѣбва да работимъ за двѣтѣ тия съседки". И трѣбва да отбележимъ, че отъ срѣдата на XIX в. насамъ математицитѣ не се задоволяватъ само съ това, да разработватъ своята наука, а иматъ претенцията да даватъ най-оригиналнитѣ и най-точнитѣ приноси къмъ оня сѫщественъ клонъ отъ философията, който има за предметъ произхода, естеството и обсѣга на нашитѣ знания. Критическиятъ периодъ въ математиката, който настѫпи следъ изграждането на инфинитезималното смѣтане въ тѣсна връзка съ физиката и природознанието, ни напомня времето, когато геометрията на старитѣ гърци се отдѣли отъ космологичнитѣ и философскитѣ спекулации, съ които тя бѣ свързана по-преди. Презъ този периодъ на критична ревизия бидоха подложени на преоценка всички резултати, които математиката бѣ придобила, преди да се отдѣли отъ физиката. Усилията на математицитѣ бѣха насочени главно къмъ това, да освободятъ своята наука отъ „свещения физически елементъ", като подложиха всичко на огнената проба на логиката. По този начинъ математиката се прости съ много привидни очевидности, нѣкои отъ които бѣха изхвърлени, като илюзорни, а други бѣха замѣнени съ логически доказателства. Това обособяване на математиката съвсемъ не означава, че тя е скѫсала връзкитѣ си съ физическата действителность. Вѣрно е, че съвременниятъ математикъ се стреми съзнателно да освободи своитѣ изводи отъ „тиранията на външния свѣтъ", както се изразява Поанкаре, за да избѣгне преди всичко заблуждения и да види освенъ това, какво може да създаде човѣшкиятъ духъ, като се задълбочава въ себе си. Това не значи още, че той скѫсва напълно съ външния свѣтъ. Нагледнитѣ представи за нѣщата служатъ често като удобни модели за абстрактнитѣ математически понятия и ни улесняватъ твърде много при търсенето на истината. Въ този смисълъ тѣзи модели оказватъ незамѣними услуги. Но докато по-рано математицитѣ често отождестяваха грубитѣ физически модели съ съответнитѣ имъ математически понятия, съвременниятъ математикъ си служи съ тѣхъ само като надеждни упѫтвачи, които често пѫти му даватъ възможность да открие истината, още преди да я е доказалъ. Тѣзи модели посочватъ често и пжтя за логическото доказателство. Ала колко пжти тѣзи указания сж илюзорни! Едно време смѣтаха за излишно да даватъ математически дефиниции на понятията за непрекжснатость, крива линия, повръхнина и пр., понеже се мислѣше, че тия „примитивни“ понятия сж напълно ясни за всѣки човѣкъ, надаренъ съ здравъ разумъ. Сега тѣзи понятия се дефиниратъ строго математически и на всѣки студентъ по математиката отъ горнитѣ семестри е известно, че математическата непрекжснатость, математическата крива и пр. далече не съвпадатъ съ нашитѣ нагледни представи за тия нѣща.

Мнозина гледатъ съ известно недовѣрие и неодобрение на този стремежъ на съвременната математика да се отдѣли отъ физическия свѣтъ и да се задълбочи сама въ себе си. Тъй мислятъ предимно онѣзи, които ценятъ математиката отъ гледището на ползата, която тя принася за напредъка на природнитѣ науки, техниката и други отрасли на човѣшкото знание, които иматъ отношения съ всѣкидневието. Историческиятъ развой на науката ни учи, обаче, че подобни опасения сж безосновни. Ако чистата и незаинтерисувана любознателность не бѣше главниятъ стимулъ за научнитѣ занимания, ако всички научни издирвания оставаха предимно съ огледъ на непосрѣдствената полза, съмнително е, дали биха били възможни онѣзи научни открития, на които се радваме днесъ. Ще се опитамъ да поясня мисъльта си съ нѣколко примѣра. На времето старитѣ гърци сж изучвали съ особена любовь свойствата на конуснитѣ сѣчения — елипсата, параболата и хиперболата. Това тѣ сж правили отъ чиста любознателность, безъ огледъ на каквито и да е приложения. Близо две хилядилѣтия по-късно, когато научната съкровищница на Александрийската школа стана достояние на Западна Европа, благодарение на посрѣдничеството на арабитѣ, Йоханесъ Кеплеръ, законодательтъ на небето, откри, че планетитѣ отъ слънчевата система, включително и нашата земя, се движатъ около слънцето по елипси. Това откритие сигурно не би било възможно, ако Кеплеръ не бѣше предварително запознатъ съ свойствата на конуснитѣ сѣчения отъ съчиненията на Аполоний отъ Перга и други автори отъ гръцката древность. По този начинъ семето, посѣто отъ старитѣ гръцки математици, даде плодъ следъ цѣли 18 вѣка.

Да се спремъ на второ мѣсто на електричнитѣ явления, които сж били изучавани така ревностно отъ Галвани, Волта, Фарадей, Максуелъ, Херцъ и др. Никой не може да обвини тѣзи представители на науката, че сж имали предвидъ нѣкаква облага за себе си или за човѣчеството, когато сж се занимавали съ изучването на тѣзи явления. А днесъ всѣки знае, какво значение за нашата веществена култура иматъ откритията на тѣзи учени — открития, до които тѣ сж достигнали отъ чиста любознателность.

Да разгледаме на последно мѣсто твърде поучителния примѣръ съ едно отъ последнитѣ открития на науката — радиосъобщенията. Почти всички приписватъ това откритие на Г. Маркони, който пръвъ успѣ да предаде радиотелеграфни съобщения на по-значителни разстояния. Историята на науката ни учи, обаче, че основната идея на това откритие се съдържа въ научнитѣ трудове на английския теоретикъ-физикъ Джеймсъ Максуелъ (1831—1879 г.). Известно е, че човѣшкиятъ организъмъ е надаренъ съ чувства, които му даватъ възможность да възприема звуковитѣ и свѣтлиннитѣ трептения. Ето защо отъ край време човѣшкитѣ усилия сѫ били насочени къмъ изучване на законитѣ, които управляватъ явленията на звука и свѣтлината.

Сравнително въ по-ново време вниманието на ученитѣ е било привлѣчено и отъ явленията на електричеството, чието въздействие върху нашитѣ чувства не е било тъй непосрѣдствено, както това на звука, свѣтлината и топлината. До срѣдата на миналия вѣкъ физицитѣ сѫ изучвали предимно явленията на статическото електричество и на това въ проводницитѣ. Сѫществуването на електрически вълни до тогава не е било и подозирано по простата причина, че тѣзи вълни не въздействуватъ забележимо на никое отъ нашитѣ сетива. Крайно интересенъ и поучителенъ е начинътъ, по който съвременната наука се е натъкнала на мисъльта за сѫществуването на такива вълни. Къмъ срѣдата на XIX в., благодарение на изследванията на Фарадей, сѫ били познати общитѣ закони, които управляватъ явленията на електромагнитната динамика. Тогава Максуелъ си е поставилъ за цель да формулира математически тѣзи закони и, търсейки хармония въ тѣхъ, той се е стремилъ да ги подчини на единъ общъ законъ. Резултатитѣ, до които достигна той, се изразяватъ чрезъ неговитѣ прочути електромагнитни диференциални уравнения. И тукъ стана нѣщо странно. Отъ уравненията на Максуела произлѣзоха по пѫтя на математическата дедукция нови диференциални уравнения, прелъстително подобни на отдавна познатото уравнение, което управлява разпространението на звука, тъй нареченото уравнение на вълнитѣ. По този начинъ Максуелъ достигна пръвъ по умозрителенъ пѫть до идеята за сѫществуване на невидимитѣ за насъ и така свидливо укривани отъ природата електромагнитни вълни. По-късно нѣмскиятъ физикъ Херцъ установи и опитно сѫществуването на тѣзи вълни и постепеннитѣ усъвършенствувания на това откритие доведоха до неговото най-широко приложение и използуване въ всѣкидневния животъ. Това е единъ отъ най-голѣмитѣ триумфи на математиката.

„Достатъчно е да си отворимъ очитѣ“, казва на едно мѣсто голѣмиятъ френски математикъ и философъ Поанкаре, „за да видимъ, че придобивкитѣ на индустрията, които сѫ обогатили толкова много практични люде, не биха видѣли никога бѣлъ свѣтъ, ако сѫществуваха само тѣзи практици и ако въпроснитѣ придобивки не бѣха станали възможни, благодарение на усилията на незаинтересувани безумци, които никога не сѫ мислили за нѣкаква полза и които, въпрѣки това, сѫ се водили не отъ капризъ, а отъ нѣщо друго. По този начинъ, казва Ернстъ Махъ, тѣзи безумци спестяватъ на бѫдещитѣ поколѣния труда да мислятъ. Тѣзи, които биха работили само за непосрѣдственитѣ приложения въ практиката, не биха оставили никакво наследство подире си и, при всѣко ново изискване на практическия животъ, би трѣбвало да се почва пакъ отново".

А на друго мѣсто сѫщиятъ авторъ се изказва по следния начинъ за цената, която той дава на успѣхитѣ, осѫществени отъ техниката: „Ако азъ се възхищавамъ отъ успѣхитѣ на индустрията, това правя главно, защото, освобождавайки ни отъ материалнитѣ грижи, тѣ ще ни дадатъ единъ день повече свободно време, за да съзерцаваме природата; азъ не казвамъ: науката е полезна, защото тя ни учи да строимъ машини; азъ казвамъ: машинитѣ сѫ полезни, защото, работейки за насъ, тѣ ще ни дадатъ повече време да работимъ за науката. Но не е излишно да забележимъ, че между тѣзи две схващания нѣма разногласие и че човѣкъ, преследвайки една благородна цель, постига всичко друго въ последствие".

Не бихъ желалъ, обаче, отъ изложеното до тукъ да останете съ впечатлението, че все пакъ значението на математиката се изчерпва съ услугитѣ, които тя прави на природнитѣ науки и техниката. Това е само едната страна на въпроса. Ако математиката се нагаждаше, тъй да се каже, само къмъ вкуса на своята клиентела, нейниятъ упадъкъ би настѫпилъ твърде скоро и тогава тя би стояла безпомощно предъ новитѣ проблеми, поставени ѝ отъ физиката и природнитѣ науки. Това важи впрочемъ не само за математиката, но и за физиката. Всѣка точна наука е длъжна да се задълбочи сама въ себе си, за да приведе въ редъ и хармония резултатитѣ придобити често по несигурни пѫтища на познание. Подобно критично подреждане и систематизиране на събрания материалъ ни дава възможность да се ориентираме полесно въ привидния хаосъ на фактитѣ и да откриемъ нѣкои закономѣрности, които ни даватъ възможность да обхванемъ сравнително лесно въ нашето съзнание науката като нѣщо цѣлостно. За нашата наука, обаче, този процесъ на задълбочаване има по-сѫществено значение; въ нейната лаборатория грубитѣ представи за математическитѣ понятия се шлифоватъ често до неузнаваемость и, което е по-важно, тамъ се създаватъ нови понятия като продукти на нашия духъ, които отъ своя страна оплодяватъ науката и ѝ даватъ творчески тласъкъ. Една сполучлива дефиниция или сполучливото въвеждане на едно ново понятие въ математиката може да разкрие неочаквано нови хоризонти. И наистина, да спремъ за малко нашето внимание върху отрицателнитѣ числа, които се въвеждатъ още отначало въ алгебрата. Колкото и да си служи учительтъ съ нагледи, за да изясни смисъла и значението на тѣзи числа и на аритметичнитѣ действия съ тѣхъ, за ученика остава все пакъ загадка, защо напр. произведението на две отрицателни числа да е положително; за него сѫщо тъй остава неясно, коя необходимость налага разширението на понятието число, когато, споредъ неговото убеждение, положителнитѣ числа сѫ достатъчни, за да решаваме всички задачи отъ практическия животъ. Напраздно ще търсите задоволителното обяснение на тѣзи загадки въ учебницитѣ по елементарна алгебра или въ съчиненията на по-старитѣ математици. Инстинктивно последнитѣ сѫ налучкали правия пѫть, безъ да си даватъ отчетъ за смисъла и предназначението на тѣзи нови числени символи. Едва съвременната математика хвърли пълна свѣтлина по този въпросъ; накратко нейното становище може да се изрази така: съ въвеждането на отрицателнитѣ числа се постига въ математиката икономия на мисленето. За неосведоменитѣ това може да звучи парадоксално; но за онзи, който е запознатъ съ аналитичната геометрия, аналитичната механика и математическия анализъ, е ясно като бѣлъ день, че основнитѣ положения и резултати на тѣзи дисциплини не биха могли да бѫдатъ изразени чрезъ универсални формули, валидни за всѣко положение относно координатната система, ако не си служехме съ апарата на релативнитѣ числа. А тази именно универсалность е отъ капитално значение за поменатитѣ дисциплини, защото ни дава възможность да включимъ въ единъ формуленъ изразъ всички частни случаи, безъ всѣкакво изключение. Въ това се състои икономията на мисленото, за която говорихъ по-горе.

Още по-поучителенъ е примѣрътъ съ въвеждането на имагинернитѣ числа въ математиката. Тѣзи числа сѫ били неканени гости за математицитѣ, както показва и названието, което тѣ сѫ имъ дали. Причината за това е било обстоятелството, че до така нареченитѣ „имагинерни символи“ математицитѣ сѫ дошли чрезъ прилагане на формалнитѣ правила на действието кореняване, извършени тъй да се каже по непозволенъ начинъ. До въвеждането на тѣзи символи въ алгебрата обобщението на понятието число е ставало винаги въ съгласие съ геометричната нагледность: новитѣ числени символи сѫ добивали право на сѫществуване, само ако сѫ могли да бѫдатъ въплътени въ конкретни геометрични образи. Понеже имагинернитѣ символи сѫ се появили на чисто аритметична почва, на тѣхъ не сѫ отговаряли отначало никакви геометрични образи, поради което тѣхното реално сѫществуване е било отричано. Но какво е наложило все пакъ тѣхното въвеждане въ алгебрата и анализа? Единствениятъ отговоръ на този въпросъ е безъ съмнение нашиятъ стремежъ да избѣгнемъ изключенията при извършването действието коренуване, като направимъ възможно това действие и тогава, когато подкоренната величина е отрицателна. Но, както казахме, на този легитименъ стремежъ се е противопоставяло схващането на повечето математици, че обобщенитѣ числени символи иматъ право на сѫществуване само дотолкозъ, доколкото тѣ могатъ да бѫдатъ въплътени въ конкретни геометрични образи. Съ течение на времето, обаче, се е затвърдило постепенно убеждението, че въвеждането на така нареченитѣ имагинерни числа е не само полезно, но дори и неизбѣжно въ нѣкои глави на математиката. Днесъ вече математическата реалность на тѣзи числа не се оспорва отъ никого и ние оперираме съ тѣхъ съ сѫщата сигурность, съ която оперираме и съ тъй нареченитѣ реални числа. Но нѣщо повече: въвеждането на комплекснитѣ числа въ съвременната математика е отъ такава голѣма полза, че безъ тѣхъ не би билъ мислимъ математическиятъ анализъ. Дори и въ областьта на геометрията, механиката и физиката сѫществуватъ проблеми, чието решение става възможно единствено чрезъ теорията на функциитѣ на една комплексна промѣнлива. Поразителенъ примѣръ за това ни даватъ небесната механика и хидромеханиката. Вѣрно е, че проблемитѣ на тѣзи науки могатъ да бѫдатъ третирани понѣкога и съ помощьта на реалния анализъ, но методитѣ на анализа на комплекснитѣ числа сѫ много по-кратки и по-прегледни. Виждаме по този начинъ, че макаръ и продукти на абстрактната мисъль, комплекснитѣ числа сѫ допринесли твърде много за напредъка на математиката и тѣхното въвеждане въ науката е оправдано напълно съ ползата отъ тѣхъ. И въ този случай се убеждаваме, че творбитѣ на абстрактната научна мисъль, лишени нагледъ отъ реално съдържание, могатъ да допринесатъ за напредъка на науката и нейнитѣ приложения и съ това да реализиратъ икономия на мисленето.

Но има математически дисциплини, които не само че досега не намиратъ приложение въ физиката и природнитѣ науки, но не сѫществуватъ никакви изгледи за подобни приложения. Такива сѫ напр. висшата аритметика или теорията на числата, теорията на множествата, аксиоматиката, топологията и др. Какво оправдание има тѣхното сѫществуване? Не се ли свежда тѣхното значение до това на една забавна игра, която може да увлѣче страстно играчитѣ, но отъ която въ края на краищата нѣма никаква реална полза? За единъ непоправимъ утилитаристъ, може би, отговоритѣ на тѣзи въпроси сѫ утвърдителни. Нека не бѫдемъ, обаче, толкозъ строги сѫдии и да не преценяваме всѣка творба на човѣшкия духъ отъ гледището на ползата, защото, изпадайки въ тази крайность, ние бихме отрекли и повечето творби на изкуството, както и много други постижения на човѣшкия духъ, които отличаватъ съвременния човѣкъ отъ животнитѣ. Известно е напр., че държавитѣ и нѣкои богати фондации харчатъ стотици милиони и милиарди левове за обзавеждане на астрономически обсерватории съ гигантски телескопи, за да могатъ съ тѣхъ ученитѣ да наблюдаватъ и най-отдалеченитѣ мъглявини. Не може да се отрече известна доза отъ идеализъмъ у тѣзи, които даватъ срѣдствата за такива обсерватории, защото никой не може да очаква нѣкаква реална облага отъ научната работа въ тѣхъ. Ако тѣзи дарители ценятъ тъй високо научнитѣ изследвания и даватъ така щедро срѣдства за чисто научни цели дори и тогава, когато тѣзи изследвания биха задоволили само нашата любознателность, това е сигуренъ признакъ, че и у тѣзи хора на практическия животъ мъждѣе смжтното съзнание, че човѣшкиятъ духъ има нужда да се издигне надъ грижитѣ на всѣкидневието до виситнитѣ на научнитѣ съзерцания. Колко повече това важи за хората на науката! Нека не имъ оспорваме правото да се занимаватъ съ проблеми, чужди на приложенията, защото, както споменахъ и по-рано, често тѣзи проблеми сж основни проблеми отъ теорията на познанието. Нека да не забравяме най-сетне, че развоятъ на наукитѣ е далъ достатъчно доказателства за това, че най-добре сж работили за приложенията на науката въ природознанието онѣзи идеалисти, които най-малко сж мислили за тѣзи приложения и най-малко сж имали полза отъ тѣхъ.

Не бихъ желалъ да оставя незасегнатъ и другъ въпросъ въ връзка съ математическото творчество, който остава за широката публика неясненъ поради недостжпностьта на математическитѣ теории. Мамятъ се ония, които мислятъ, че главниятъ стимулъ за математическитѣ изследвания е ползата отъ тѣхното прилагане въ природознанието. Да чуемъ, какво ни казва по този въпросъ цитираниятъ вече математикъ и философъ Поанкаре:

„Привърженицитѣ на математиката намиратъ въ нея аналогична наслада на тази, която доставятъ живописьта и музиката. Тѣ се удивляватъ на деликатната хармония на числата и формитѣ; тѣ се възхищаватъ, когато едно ново откритие имъ отваря пжтя къмъ неочаквани перспективи; и радостьта, която тѣ изпитватъ при това, нѣма ли естетиченъ характеръ, ако и да не участвуватъ въ нея чувствата? . . . Ето защо азъ не се колебая да кажа, че математиката заслужава да бжде култивирана заради самата нея и че теориитѣ, които не намиратъ приложение въ физиката, трѣбва да бждатъ култивирани наравно съ другитѣ“.

„Учениятъ, достоенъ за това име, особено математикътъ, изпитва спрямо своята творба сжщитѣ впечатления, както и артистътъ; неговата радость е сжщо тъй голѣма и е отъ сжщото естество. И ако не пиша за една публика, влюбена въ науката, азъ не бихъ се осмѣлилъ да се изразя по този начинъ поради недовѣрието на профанитѣ. Но тукъ азъ мога да изкажа напълно мисъльта си: Ако ние работимъ, това вършимъ не толкозъ, за да получимъ онѣзи положителни резултати, къмъ които обикновенитѣ хора смѣтатъ, че сме привързани, колкото да изпитаме споменатата естетична наслада и да я съобщиме на тѣзи, които сж способни да я изпитатъ".

Особено отъ последната изповѣдь на Поанкаре става явно, че стимулътъ, който поддържа въ истинския математикъ интереса къмъ научната работа, е оная естетична наслада, която той изпитва при творческия процесъ на търсенето и откриването на истината и която нѣма нищо общо съ нѣкакви утилитарни съображения. Той се въодушевява въ своитѣ изследвания само отъ желанието да познае истината, неговата цель е да чуе нови акорди отъ оная хармония, която управлява свѣта на чистата теоретична мисъль. Всичко това мжчно може да бжде разбрано отъ нематематика, защото математиката има сложно устройство, нейната сграда е построена върху висока скала, заградена съ цѣла стена отъ трудности, които трѣбва да бждатъ преодолѣни съ упоритъ трудъ, за да се достигне до цъвтещитѣ градини. Който, обаче, успѣе да превъзмогне тѣзи трудности и зърне само веднажъ този прекрасенъ свѣтъ, той вече нѣма да помисли за връщане.

Мнозина ще изпаднатъ въ недоумѣние, узнавайки, че потикътъ за математическо творчество е отъ емоционалноестетиченъ характеръ. По този въпросъ е много писано и много разисквано, но той остава и до днесъ не напълно уясненъ, както впрочемъ е случаятъ съ повечето въпроси отъ психологията на творчеството, поради осжднитѣ извори и данни за тѣхното разрешение. Всѣкиму е известно, че математиката почива върху вѣчнитѣ и неизмѣнни закони на формалната логика; естествено е да се запитаме, има ли мѣсто въ желѣзнитѣ рамки на тѣзи закони за творческия полетъ на фантазията. Не се ли изчерпва всичкото изкуство на математика въ това, правилно да смѣта, правилно да чертае и правилно да прилага законитѣ на логиката? За онзи, който е запознатъ що годе съ характера на математическата наука, макаръ и въ нейнитѣ наченки, тѣзи въпроси звучатъ тъй наивно, както, напр. би звучалъ въпросътъ, не е ли достатъчно за единъ поетъ да знае и да умѣе добре да прилага правилата на граматиката и стихотворството. Както въ поезията и живописьта, тъй и въ математиката изборътъ на сюжета е предоставенъ на самия творецъ; но нѣщо повече: както въ поезията тъй и въ математиката единъ и сжщъ сюжетъ може да бжде разработенъ по най-различни начини, въ зависимость отъ вкуса, школата и изразнитѣ срѣдства. Както въ поезията, тъй и въ математиката логиката играе подчинена роля въ творческия процесъ; първенствуващо мѣсто заема тамъ интуицията.

За да може да се прояви единъ математикъ творчески, безусловно необходимо е той да бжде надаренъ съ вѣрна интуиция, която да му открива истината, преди той още да я е доказалъ. Ако е лишенъ отъ тая дарба, той не би могътъ не само да твори, но и да разбере правилно една математическа творба. Само тъй може да се обясни, защо тъй често се срѣщатъ въ живота люде, инакъ интелигентни и способни, които не могатъ да разберать едно математическо доказателство. Ако владѣятъ добре законитѣ на логиката, тѣ ще бждатъ въ състояние да провѣрятъ вѣрностьта на всѣки единъ отъ силогизмитѣ, отъ които е съставено доказателството, безъ, обаче, да могатъ да схванатъ логическата постройка въ нейната цѣлость. Въ тѣхното съзнание спойката между отдѣлнитѣ силогизми е много слаба, за да могатъ да ги задържатъ въ присжщата имъ последователность и взаимна връзка. Още по-малко такива люде могатъ да си обяснятъ пжтя, по който авторътъ е достигналъ до тази постройка, т. е., какъ той е подредилъ силогизмитѣ и заключенията тъкмо въ дадения редъ, който сѣкашъ неочаквано довежда до желания резултатъ. Нѣщо подобно се случва съ повръхностния наблюдатель, когато той разглежда отвънъ една вече завършена архитектурна постройка. Нейниятъ планъ и техническитѣ подробности на нейния строежъ могатъ да бждатъ правилно разбрани и преценени само отъ опитното и наблюдателно око на единъ архитектъ; представата, която ще си състави той за постройката, се различава коренно отъ тази на единъ неопитенъ наблюдатель, въ очитѣ на когото много нѣща изглеждатъ случайни и немотивирани. Разбира се, чрезъ упражнение и залѣгане всѣки може да култивира донѣкжде у себе си способностьта да вникне въ сжщината на едно математическо доказателство, но малцина сж онѣзи, на които това се удава безъ особени усилия. Ето защо по отношение на математиката хората се раздѣлятъ рѣзко на две категории: по-голѣмата часть отъ тѣхъ мжчно схващатъ отвлѣченитѣ математически разсжждения и затова не проявяватъ особенъ интересъ къмъ математиката; други пъкъ, по-малко на брой, се отдаватъ съ особена любовь на математически занимания. Тѣзи последнитѣ обикновено биватъ надарени съ това, което наричаме математическа интуиция — дарба, която, както споменахме и по-горе, ни дава възможность да налучкваме истината, безъ да сме я доказали строго. Тази дарба ни дава възможность сжщевременно да вникнемъ лесно въ вжтрешния строежъ на една математическа постройка и да я схванемъ като нѣщо цѣлостно. Разбира се, тукъ не става дума за повръхностната интуиция на нагледитѣ, която Ф. Клайнъ нарече наивна нагледность, а за интуицията на чистото число или на чиститѣ логични форми, която позволява на математицитѣ не само да доказватъ, но и да откриватъ. „Чрезъ нея тѣ обхващатъ само съ единъ по-гледъ общия планъ на логичната постройка, и то безъ привидна намѣса на сетивата. Отхвърляйки помощьта на въображението, което . . . не винаги е безпогрѣшно, тѣ могатъ да вървятъ напредъ безъ страхъ, че ще се измамятъ. Щастливи сж тѣзи, които могатъ да минатъ безъ тази опора. Ние трѣбва да имъ се учудваме, но колко тѣ сж рѣдко!"

Далече е при това отъ мене мисъльта, че всѣки, който работи въ абстрактнитѣ области на математиката, е надаренъ съ подобна интуиция. Но, струва ми се, че тукъ бездарностьта по-ясно личи и по-лесно може да се отстрани, отколкото всѣкжде другаде, кждето съ прилежание все пакъ може да се постигне нѣщо.

Историята на нашата наука ни дава предостатъчно примѣри за математици, надарени съ дълбока интуиция. Може да се каже, че най-голѣмитѣ научни открития се дължатъ именно на тази рѣдка дарба. Така, единъ отъ най-голѣмитѣ математици на XVIII в., Леонардъ Ойлеръ, ни е оставилъ редица трудни теореми въ теорията на числата, които бѣха доказани строго едва напоследъкъ, и то съ срѣдства, съвършено непознати презъ епохата на Ойлера. И, важното е да се отбележи, че всички негови недоказани теореми излѣзоха вѣрни. Сжщо тъй на дълбоката интуиция на Евклида се дължи провъзгласяването за аксиома на прочутия говъ постулатъ за успореднитѣ прави. Едва изследванията на Лобачевски, Болияй и др. презъ миналия вѣкъ хвърлиха пълна свѣтлина по този въпросъ, като установиха по единъ безспоренъ начинъ независимостьта на този постулатъ отъ останалитѣ аксиоми на геометрията и съ това доказаха неговата недоказуемость. Насърдчени отъ този примѣръ, съвременнитѣ математици си поставиха за цель да изяснятъ и отъ становището на чистата логика въпроса, доколко аксиомитѣ на геометрията, установени първоначално възъ основа на нашата интуиция, удовлетворяватъ на изискването да не си противоречатъ и да не зависятъ една отъ друга. Не ще съмнение, съвременната математика не остави непокжтната постройката на старитѣ гръцки математици. Съвременната аксиоматика разполага съ много по-мощни срѣдства и си поставя и разрешава съ успѣхъ задачи, които до началото на миналия вѣкъ минаваха за неразрешими. Тя сега си поставя за цель не само да състави една пълна система отъ аксиоми, възъ основа на които да може да се издигне цѣлата геометрична сграда по пжтя на логическата дедукция, но и да ни отговори на въпроситѣ, дали тази система не съдържа вжтрешни противоречия и дали нѣкои отъ аксиомитѣ не сж следствие отъ другитѣ. Тѣзи именно модерни изследвания показаха, колко вѣренъ усѣтъ къмъ науката сж имали математицитѣ отъ Александрийската школа преди две хилядилѣтия, когато тѣ не сж разполагали съ срѣдствата на съвремената математика за логическо изясняване на въпроситѣ, за които току що споменахъ.

Нека отбележа пжтьомъ, че модернитѣ изследвания разрушиха и единъ предразсждъкъ за характера на ония основни положения въ една наука, които наричаме аксиоми. Попитайте кой да е ученикъ отъ горнитѣ класове на гимназията, що е аксиома, и той ще ви отговори безъ колебание, че аксиома се нарича всѣка истина, която е отъ само себе очевидна и въ вѣрностьта на която никой човѣкъ съ здравъ разумъ не се съмнява. Е добре, единъ макаръ и повръхностенъ анализъ на тази дефиниция ни показва, че тя е несъстоятелна отъ научно гледище. И наистина, колкото и да чувствува всѣки човѣкъ, че е лишенъ отъ всевъзможни духовни или материални блага, отъ едно никой не се оплаква: че е лишенъ отъ това, което наричаме здравъ разумъ. Но дори и да се намѣри обективенъ критерий за онази категория люде, които сж надарени съ здравъ разумъ, пакъ трѣбва да признаемъ, че има случаи, въ които гениални учени и философи сж се заблуждавали, като сж разглеждали като очевидни истини нѣща, които въ последствие сж се оказвали заблуждения. Така напримѣръ, Аристотель е формулиралъ природния законъ, че тежкитѣ тѣла падатъ по-бърже отъ лекитѣ. Достатъчно е да наблюдаваме, какъ падатъ листата на дърветата и по-тежкитѣ тѣла като камънитѣ, за да се убедимъ въ абсолютната вѣрность на тази истина. Прѣвъ Галилей се е усъмнилъ въ нейната достовѣрность, като е съобразилъ, че падането на тѣлата, което наблюдаваме въ природата, не е чисто явление, защото то става въ съпротивителна срѣда, наречена земна атмосфера. Противно на твърдението на Аристотеля, Галилей откри, че законитѣ на падането въ праздно пространство сж много по-прости; при тѣхъ масата на падащитѣ тѣла е безъ значение. Но изследванията на Лобачевски, Болияй и други показаха, че и въ геометрията „очевидноститѣ“ сж относителни, защото въ така наречената хиперболична геометрия Евклидовата аксиома за успореднитѣ прави не е вѣрна и е замѣстена съ нейното логическо отрицание. Ето защо „очевидностьта“ на една истина не е нито необходимо, нито достатъчно условие за нейната достовѣрность. Единствената добродетель, която изисква съвременната наука отъ една система отъ аксиоми, е тя да не съдържа вжтрешно противоречие. Иначе, отъ гледището на чистата логика, тази система може да бжде съвсемъ произволна. Разбира се, отъ гледището на приложенията е желателно, аксиомитѣ да сж съобразни съ пространствената нагледность, но това пожелание не означава още необходимость.

Наблюдавайки бързия развой и постоянното разклонение на науката, мнозина се страхуватъ, че ще настжпи време, когато работницитѣ въ отдѣлнитѣ клонове на науката не ще могатъ вече да се разбиратъ. Всѣки клонъ на науката си създава присжщи нему методи на изследване, своя собствена терминология и се стреми, тъй да се каже, къмъ известна независимость и автономия. Не сѫществува ли опасность, ако вървимъ по този пѫть, да стигнемъ най-сетне до Вавилонско стълпотворение въ науката, при което работницитѣ отъ разнитѣ области на човѣшкото знание биха говорили на различни езици? Не може да се отрече, че при сегашното състояние на науката ние не можемъ да мечтаемъ, че ще настѫпятъ отново онѣзи времена на древностьта, когато единъ всеобемащъ умъ като Аристотель би могълъ да обгърне всички отрасли на съвременното човѣшко знание. Но сѫществуватъ известни указания, които ни даватъ основание да бѫдемъ оптимисти по отношение на постоянното разветвяне на математиката. Да вземемъ напр. алгебрата и геометрията, тѣзи два главни стълба на математиката. Преди две хилядилѣтия аритметиката и геометрията сѫ били тѣсно свързани въ едно цѣло — математиката на древнитѣ гърци. Съ течение на времето, обаче, тѣ сѫ се обособили, както по отношение на обектитѣ, тъй и по отношение на методитѣ на изследването. На гения на Декарта дължимъ една нова математическа дисциплина — аналитичната геометрия, която хвърля мостъ между тогавашната алгебра и геометрия. Благодарение на това епохално откритие на Декарта, ние сега сме въ състояние да облѣчемъ една геометрична задача въ аналитични формули или обратно; по този начинъ ние вече сме въ състояние да решаваме съ леснина нѣкои задачи, надъ които напраздно сѫ се трудили математицитѣ отъ древностьта. За други пъкъ геометрични задачи, завещани ни сѫщо отъ староитѣ гърци, ние успѣхме да докажемъ съ срѣдствата на аналитичната геометрия, алгебрата и аритметиката, че тѣ не могатъ да бѫдатъ решени съ помощьта на линийката и пергела. Такава е напримѣръ прочутата задача за квадратурата на крѫга.

Примѣрътъ съ откритието на аналитичната геометрия отъ Декарта иде да ни покаже, че следъ обособяването на отдѣлнитѣ математически дисциплини възможенъ е съ течение на времето и обратниятъ процесъ — тѣхното сближение. И може да се каже, че най-голѣми и най-плодовити сѫ ония открития въ математиката, които се дължатъ на сближение и взаимно оплодяване на две привидно чужди една на друга области на човѣшкото знание. Така, на времето Гаусъ можа да хвърли пълна свѣтлина върху проблемата за правилнитѣ многоѫгълници благодарение на откритието, че тази проблема съвпада напълно съ проблемата за алгебричното решение на биномнитѣ уравнения. Неговитѣ изследвания показаха още, че тази проблема е въ основата си чисто аритметична. По този начинъ геометрията, алгебрата и аритметиката си подадоха рѫка, за да решатъ съ задружни усилия една задача, която геометрията сама бѣше безсилна да реши въ продължение на две хилядилѣтия.

Преди малко споменахъ, че за нѣкои задачи, завещани ни отъ древностьта, съвременната математика е успѣла да докаже, че тѣ не могатъ да бждатъ решени съ помощьта на линийката и пергела. Тукъ възниква, обаче, другъ въпросъ отъ общъ характеръ, който може да породи известни съмнения у незапознатитѣ съ методитѣ на модерната математика: сжществуватъ ли въ математиката неразрешими проблеми. Има ли въ математиката покрай ignoramus още и ignorabimus, покрай незнайно още и неузнаваемо? Известно е, че по този въпросъ, отнесенъ изобщо за човѣшкото познание, мненията на ученитѣ и философитѣ сж раздѣлени. Мнозина отъ тѣхъ сж скептици и сж убедени, че между проблемитѣ, които си е поставила науката, има и такива, които никога не ще могатъ да бждатъ разрешени. Това тѣхно убеждение, обаче, е по-скоро вѣра, която не почива върху строго научни основи, тъй че всѣки е свободенъ да я споделя или не. И броятъ на тѣзи, които я спо дѣлятъ, не играе никаква роля за нейната реална стойность, защото въ науката твърде често малцинството е, което има право. Не може ли да се каже сжщото и за ония геометрични задачи (трисекцията на жгъла, квадратурата на кржга и пр.), за които математицитѣ твърдятъ, че не могатъ да се решатъ съ елементарни геометрични срѣдства? Ако всички досегашни усилия на призвани и непризвани да решатъ тѣзи задачи сж били безплодни, значи ли това, че и всички бждещи опити въ това направление ще иматъ сжщата участь? Та нима триумфалниятъ ходъ на науката отъ единъ вѣкъ насамъ не ни дава достатъчно основания да бждемъ скромни и предпазливи, когато се осмѣляваме да предсказваме нейното безсилие да премине известни граници на нашето познание? На какво основание тогава можемъ да твърдимъ, че, напримѣръ, никой никога не ще успѣе да реши задачата за трисекцията на жгъла?

За да отговоримъ на тѣзи въпроси, ние сме длъжни преди всичко да обяснимъ, какво съдържание влагаме въ твърдението, че тази и тази задача не може да бжде решена съ известни помощни срѣдства. Това твърдение може да бжде разбрано двояко: или че ние, при сегашнитѣ състояния на нашитѣ знания, не можемъ да решимъ тази задача, или че тя е изобщо нерешима. Въ първия случай се касае за субективна, а въ втория — за обективна невъзможность. Разбира се, субективната невъзможность може да има само релативенъ смисълъ и зависи отъ състоянието на нашитѣ познания и възможности: това, което не е по силитѣ ми днесъ, може да бжде за мене лека играчка утре; това, което изглежда неразрешима загадка при сегашното състояние на нашето знание, може да бжде постигнато дори съвсемъ неочаквано при единъ бждещъ разцвѣтъ на науката. Напротивъ, обективната невъзможность трѣбва да се разбира въ абсолютенъ смисълъ. За да дамъ една идея за обективна невъзможность въ математиката, азъ ще си послужа съ единъ подостжпенъ примѣръ. Да разгледаме на първо мѣсто следната задача: Числото 115 да се представи като сборъ отъ четни събираеми. Не сж нуждни кой знае какви познания, за да се разбере, че задачата изисква нѣщо невъзможно; и наистина, сборътъ на две или повече четни числа е сжщо четно число, поради което не може въ никой случай да бжде равенъ на нечетното число 115. Ние можемъ, следователно, съ абсолютна сигурность да твърдимъ, че задачата е невъзможна, защото допускането, че тя притежава решение, противоречи на теоремата, че сборъ отъ четни събираеми е пакъ четно число. И ако нѣкой самонадѣянъ невежа, комуто не е известна тази теорема, се опита да реши задачата, ние можемъ съ абсолютна сигурность да предскажемъ неговия неуспѣхъ.

Единъ характеренъ белегъ на съвременната математика е, че тя ликвидира съ редъ нерешени проблеми, доказвайки тѣхната обективна невъзможность. Така, въ началото на миналия вѣкъ Абелъ доказа невъзможностьта да се реши съ радикали общото уравнение отъ пета и по-висока степень; въ 1882 г. Линдеманъ доказа невъзможностьта на квадратурата на кржга и т. н. Всички тѣзи доказателства се извършватъ по непрѣкъ пжть: допускането, че задачата е възможна при опредѣлени условия, води следъ дълги разсжждения до противоречие съ известни аритметични истини. Нещ̡е съмнение, за разбирането на едно такова доказателство сж нуждни не само солидни математически познания, но и добре дисциплиниранъ умъ, който да обгръща всички възможности и да не допуска логически празднини въ разсжжденията.

Приведениятъ примѣръ е достатъченъ, за да ни убеди, че въ математиката може да става дума и за обективна невъзможность. Рабира се, съ това още не е разрешенъ въпросътъ, дали въ математиката може да става дума за ignorabimus, т. е. дали не сжществуватъ математически проблеми, решението на които ще остане на вѣчни времена загадка за човѣшкия родъ. Досегашнитѣ успѣхи на тая наука ни даватъ субективната увѣреность да бждемъ оптимисти въ това отношение и да вѣрваме, че поне въ тази область не сжществуватъ естествени прегради на човѣшкото познание.

Азъ се постарахъ да изясня съ тѣзи общи мисли, доколкото това е възможно въ рамкитѣ на една академична речь, въ що се състои сжщината на математическата наука и какво значение има тя за общочовѣшката култура. Въ продължение на нѣколко хилядилѣтия математиката е била вѣренъ спжтникъ на човѣчеството въ непрестаннитѣ му усилия да се издигне надъ първобитното си състояние. Всѣки периодъ на подемъ за човѣчеството е билъ придружаванъ и съ подемъ на математиката. Отъ нейния непресъхващъ изворъ човѣчеството е черпило съ пълни шепи знания, необходими му за изграждане на неговата веществена култура. Отъ сжщия кристаленъ изворъ нейнитѣ привърженици сж черпили знания, които сж задоволявали тѣхната чиста любознателность и които сж имъ давали възможность да се наслаждаватъ на чудната красота и хармония и вѣчната свежесть на нейнитѣ истини. По този начинъ математиката се явява като синтезъ на двата идеала, които осмислятъ човѣшкото сжществуване: това сж идеалитѣ на истината и красотата.