незабравими етюди

Българската олимпиада по математика е една от най-старите национални олимпиади по математика в света, а на провежданите до сега вече над половин век международни олимпиади по математика българските ученици успяха да покажат високото качество на онова, което наричаме „извънкласна работа по математика“в българското образование.

Един от математиците, оставили светла следа в славната история на нашето „олимпийско движение“, е Венелин Флоров[1] Илюстрация на нивото на математическото творчество на Флоров е негова задача, публикувана в немското списание Praxis der Mathematik, направила впечатление на математическата колегия и породила по-нататъшни търсения. Намираме я на страниците и на канадското математичеко списание Crux Mathematicorum. Crux е международно признат източник на оригинални и трудни състезателни задачи. Сред професионалистите и любителите-математици се смята за чест, когато на страниците на списанието се появят техни задачи или решения. Прелистването на старите броеве на Crux често е източник на вдъхновение, а понякога – и на изненади.

Йордан Табов

ЕДНА ЗАДАЧА НА ВЕНЕЛИН ФЛОРОВ НА СТРАНИЦИТЕ НА CRUX

В брой 1 от 1990 г. на Crux Mathematicorum холандският математик Якоб Грьонман предлага задача 1501, като отбелязва, че е заимствал идеята от публикация на Венелин Флоров в Praxis der Mathematik.

Задача 1501. Две окръжности k и k_1 се допират външно. Равностранният триъгълник ABC е вписан в k и точките A_1, B_1 и C_1 от k_1 са такива, че правите AA_1, BB_1 и CC_1 се допират до k_1. Да се докаже, че една от отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 е равна на сбора на другите две.

[1] Вж. статията „Три имена от ранната история на българските олимпиади по математика: Будуров, Флоров и Владимир Заимов“ в сп. „Математика“, 2/2014.

1501. *Proposed by J.T. Groenman, Arnhem, The Netherlands.*

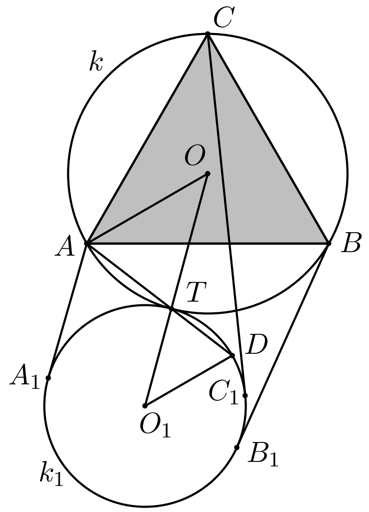
Two circles K and K_1 touch each other externally. The equilateral triangle ABC is inscribed in K, and points A_1, B_1, C_1 lie on K_1 such that AA_1, BB_1, CC_1 are tangent to K_1. Prove that one of the lengths $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ equals the sum of the other two. (The case when the circles are internally tangent was a problem of Florow in *Praxis der Mathematik* 13, Heft 12, page 327.)

В брой 2 от 1991 г. е публикувано и решението на Марчин Кучма – полски математик, който през 1992 г. заедно с Мартин Гарднер и Мъри Кламкин получава Хилбертовата награда на WFNMC.

Решение. Да означим с T допирната точка на окръжностите $k(O;\ r)$ и $k_1(O_1;\ r_1)$. За определеност ще приемем. че точката T лежи на по-малката дъга $\overset{\frown}{AB}$.

По теоремата на Птолемей за вписания четириъгълник $ATBC$ следва, че $AT.BC + BT.CA = CT.AB$ и тъй като триъгълникът ABC е равностранен, получаваме известното равенство

$$AT + BT = CT. \tag{1}$$



Нека правата AT пресича k_1 за втори път в точката D. Равнобедрените триъгълници AOT и TO_1D са подобни с коефициент на подобие $r : r_1$, следователно

$$\frac{AD}{AT} = \frac{r + r_1}{r}.$$

Оттук изразяваме

$$AA_1 = \sqrt{AT.AD} = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, AT.$$

Аналогично имаме $BB_1 = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, BT$ и $CC_1 = \sqrt{\frac{r + r_1}{r}}\, CT$. От последните три равенства и (1) следва желаното равенство $AA_1 + BB_1 = CC_1$.

Това решение може да се приложи и за първоначалната задача на Венелин Флоров в случая, когато двете окръжности се допират вътрешно. Предлагаме на любознателния читател да се убеди в това самостоятелно.