V. ЗАДАЧИ, ДАВАНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА

1. На I международна олимпиада в СРР през 1959 година

Тема за първия етап:

247. Да се докаже, че дробта $\frac{21n+4}{14n+3}$ е несъкратима за всяко натурално число n. (Представена от ПНР; оценка — 5 точки.)

248. При какви реални значения на x са удовлетворени уравненията:

$$1)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2};$$

$$2)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1;$$

$$3)\ \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2,$$

ако радикалите са реални и положителни. (СРР; 8 точки.)

249. Дадено е уравнението

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

Да се състави квадратно уравнение, корените на което да съответстват на значенията на $\cos 2x$.

Да се разгледа случая за $a=4$, $b=2$, $c=-1$. (УНР; 7 точки.)

Тема за втория етап:

250. Да се построи правоъгълен триъгълник по дадена хипотенуза, като се знае, че медианата към хипотенузата е средна геометрична на двата катета. (УНР; 5 точки.)

251. В една равнина е дадена отсечка AB и върху нея произволна точка M. Върху отсечките AM и MB като на страни са построени квадрати $AMCD$ и $MBEF$, лежащи от една и съща страна на AB. Окръжностите, описани около квадратите с центрове P и Q, се пресичат освен в точка M още и в точка N.

Да се докаже, че:

а) правите AF и BC минават през точка N;

б) при кое да е положение на точка M, правата MN минава през една и съща точка S от равнината.

в) Да се намери геометричното място на средата на отсечката PQ, когато M описва отсечката AB. (СРР; 8 точки).

252. Дадени са равнините P и Q, които се пресичат в правата p. В равнината P е дадена точка A, а в равнината Q — точка C, които не лежат на правата p.

Да се построи равнобедрен трапец $ABCD$ със срещуположни върхове A и C ($AB \parallel CD$), в който да може да се впише окръжност, така че върхът B да лежи в равнината P, а върхът D — в равнината Q. (ЧССР; 7 точки.)

2. На II международна олимпиада в СРР през 1960 година

Тема за първия етап:

253. Да се намерят всички трицифрени числа, които разделени на 11, дават частно, равно на сумата от квадратите на цифрите им. (НРБ; 8 точки.)

254. За какви стойности на x е в сила неравенството

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9. \quad \text{(УНР; 6 точки.)}$$

255. В правоъгълен триъгълник ABC хипотенузата BC е разделена на n равни части, където n е нечетно число. Частта, която съдържа средата на хипотенузата, се вижда от върха A на правия ъгъл под ъгъл α. Ако хипотенузата е a, а височината към нея — h, да се докаже, че $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$. (СРР; 6 точки.)

Тема за втория етап:

256. Да се построи триъгълник ABC, ако са дадени височините h_a и h_b, минаващи съответно през върховете A и B, и медианата m_a — през върха A. (УНР; 5 точки.)

257. Даден е кубът $ABCD\,A'B'C'D'$.

а) Да се намери геометричното място на средата на отсечката XY, където X е произволна точка върху отсечката AC, а Y — произволна точка върху отсечката $B'D'$.

б) Да се намери геометричното място на точка Z от отсечката XY, която удовлетворява равенството $ZY = 2XZ$ (ЧССР; 7 точки.)

258. В прав кръгов конус е вписана сфера, около нея е описан прав кръгов цилиндър, едната от основите на който лежи в равнината на основата на конуса. С V_1 е означен обемът на конуса, а с V_2 — обемът на цилиндъра.

а) Да се докаже, че равенството $V_1 = V_2$ е невъзможно.

б) Да се намери най-малкото значение на k, при което е изпълнено равенството $V_1 = kV_2$ и в този случай да се построи ъгълът при върха на осното сечение на конуса. (НРБ; 8 точки).

259. Даден е равнобедрен трапец с основи a, b и височина h.

а) Върху оста на симетрия на трапеца да се намери точка P, от която бедрата на трапеца да се виждат под прав ъгъл.

б) Да се пресметне разстоянието от точка P до една от основите на трапеца.

в) При какви условия е осъществимо построението на точка P (да се разгледат възможните случаи). (ГДР; 5 точки.)

3. На III международна олимпиада в УНР през 1961 година

Тема за първия етап:

260. Да се реши системата

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$
$$xy = z^2,$$

където a и b са дадени реални числа.

Какви условия трябва да удовлетворяват a и b, щото корените на системата да са положителни и различни. (УНР; 6 точки)

261. Нека a, b, c означават дължините на страните на произволен триъгълник, а S — неговото лице. Да се докаже, че

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 4S\sqrt{3}.$$

Да се изследва за какъв триъгълник е в сила знакът за равенството. (ПНР; 7 точки).

262. Да се реши уравнението

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

където n е произволно естествено число. (НРБ; 7 точки.)

Тема за втория етап:

263. Даден в триъгълник ABC и вътре в него е избрана произволна точка O. Правите AO, BO и CO пресичат срещуположните страни на триъгълника съответно в точки A_1, B_1 и C_1. Да се докаже, че измежду отношенията $\frac{AO}{OA_1}$, $\frac{BO}{OB_1}$ и $\frac{CO}{OC_1}$ има поне

едно, което не е по-голямо от числото 2, и поне едно, което не е по-малко от числото 2. (ГДР; 6 точки).

264. Да се построи триъгълник ABC по дадени две страни $AC=b$, $AB=c$ и $\sphericalangle AMC=\varphi$, където M е среда на страната BC и $\varphi<90°$.

Да се докаже, че задачата има решение тогава и само тогава, когато $c.\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\leqq b<c$. В кой случай е в сила знакът за равенство. (ЧССР; 7 точки.)

265. Дадена е равнина α и от едната ѝ страна точките A, B, C. Известно е, че тези точки не лежат на една права и равнината, определена от тях, не е успоредна на α.

В равнината α са избрани три произволни точки A_1, B_1, C_1. С буквите L, M и N са означени средите на отсечките AA_1, BB_1, CC_1, а с G — медицентърът на триъгълника LMN (не се разглеждат такива положения на точките A_1, B_1, C_1, за които съответните им точки L, M, N не са върхове на триъгълник).

Да се намери геометричното място на точка G, когато точките A_1, B_1, C_1 се движат в равнината α независимо една от друга. (ПНР; 7 точки.)

4. На IV международна олимпиада в ЧССР през 1962 година

Тема за първия етап:

266. Да се намери най-малкото естествено число, което има свойствата: а) написано в десетична система последната му цифра е 6; б) ако зачеркнем последната му цифра 6 и пред останалите цифри напишем 6 получава се число четири пъти по-голямо от изходното. (ПНР; 6 точки.)

Задачата може да добие редакцията: Да се намери най-малкото естествено число с последна цифра 6, което се учетворява, ако преместим тази цифра на първо място.

267. Да се намерят всички реални числа x, които удовлетворяват неравенството

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}\cdot$$ (УНР; 6 точки.)

268. Даден е кубът $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ (с основи $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Точка X описва с постоянна скорост страните на квадрата $ABCD$ в посока $ABCDA$ и точка Y описва със същата скорост страните на квадрата B_1C_1CB в

посока $B_1C_1CBB_1$. Точките X и Y започват движението си едновременно от изходните положения съответно върха A и върха B_1.

Да се намери и начертае геометричното място на средата Z на отсечката XY. (ЧССР; 8 точки.)

Тема за втория етап:

269. Да се реши уравнението

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1. \qquad \text{(СРР; 5 точки.)}$$

270. Около триъгълник ABC е описана окръжност k. Да се построи (с линийка и пергел) върху k четвърта точка D, така че в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ да може да се впише окръжност. (НРБ; 7 точки.)

Задачата може да се формулира и така: На окръжност лежат четири точки A, B, C, D, от които първите три са неподвижни. Да се намери това положение на точка D, при което в изпъкналия четириъгълник $ABCD$ може да се впише окръжност.

271. Даден е равнобедрен триъгълник ABC, за който с R и r са означени радиусите съответно на описаната и вписаната окръжност. Да се докаже, че разстоянието d между центровете на двете окръжности е

$$d=\sqrt{R(R-2r)}. \quad \text{(ГДР; 6 точки.)}$$

272. Даден е тетраедърът $DABC$. Да се докаже, че:

а) ако съществуват 5 сфери, всяка от които се допира до ръбовете му DA, DB, DC, AB, BC, CA или до продълженията на някои от тях, то тетраедърът е правилен;

б) обратно, за всеки правилен тетраедър съществуват 5 сфери, всяка от които се допира до шестте му ръба или до техните продължения. (СССР; 8 точки.)

5. На V международна олимпиада в ПНР през 1963 година

Тема за първия етап:

273. Да се намерят всички реални корени на уравнението

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

където p е реален параметър. (ЧССР; 6 точки.)

274. В пространството да се намери геометричното място на върха M на прав ъгъл, едното рамо на който минава през да-

дена точка A, а другото има поне една обща точка с дадена отсечка BC. (СССР; 7 точки.)

275. Да се докаже, че ако в изпъкнал n-ъгълник всичките ъгли са равни и последователните страни удовлетворяват неравенствата

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_n,$$

то $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$. (УНР; 7 точки.)

Тема за втория етап:

276. Да се намерят всички решения на системата

$$x_5 + x_2 = yx_1,$$
$$x_1 + x_3 = yx_2,$$
$$x_2 + x_4 = yx_3,$$
$$x_3 + x_5 = yx_4,$$
$$x_4 + x_1 = yx_5,$$

където y е реален параметър. (СССР; 6 точки.)

277. Да се докаже равенството

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$ (ГДР; 6 точки.)

278. Пет ученика A, B, C, D, E участвували в един конкурс. Някои се опитали да предскажат класирането в този конкурс. Един пред положил, че ще се класират в реда A, B, C, D, E, но не отгатнал нито мястото на всеки ученик, нито коя да е (наредена) двойка от последователно класирани участници. Друг предложил, че класирането ще бъде в реда D, A, E, C, B и отгатнал местата точно на двама от участниците и две (наредени) двойки от последователно класирани участници. Какъв е бил истинският резултат от конкурса? (УНР; 8 точки.)

6. На VI международна олимпиада в СССР през 1964 година

Тема за първия етап:

279. а) Да се намерят всички цели положителни числа n, за които числото $2^n - 1$ се дели на 7.

б) Да се докаже, че ако n е произволно цяло положително число, то числото $2^n + 1$ не се дели на 7. (ЧССР; 7 точки.)

Задачата може да се формулира и така: Да се намерят всички значения на цялото положително число n, при което поне едно от числата 2^n-1 и 2^n+1 се дели на 7.

280. Ако a, b, c са дължините на страните на произволен триъгълник, да се докаже неравенството
$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqq 3abc$. (УНР; 7 точки.)

281. В триъгълник ABC със страни a, b, c е вписана окръжност, към която са прекарани допирателни, успоредни на страните на триъгълника. Тези допирателни отсичат от дадения триъгълник три нови триъгълника, във всеки от които е вписана окръжност. Да се намери сумата от лицата на четирите вписани кръга. (СФРЮ; 6 точки.)

Тема за втория етап:

282. Всеки един от 17 учени кореспондира с останалите 16 само върху три различни теми, като при това всяка двойка учени кореспондира само върху една тема. Да се докаже, че поне трима учени кореспондират помежду си върху една и съща тема. (УНР; 6 точки)

283. В равнината са дадени 5 точки. Между правите, съединяващи тези точки, няма успоредни, перпендикулярни или съвпадащи. През всяка от тези точки са прекарани перпендикуляри към всички прави, минаващи през останалите 4 точки. Какъв е максималният брой на пресечните точки на всички перпендикуляри, като не се броят петте точки? (СРР; 7 точки.)

284. Даден е тетраедър $DABC$. Върхът D е съединен с центъра на тежестта D_1 на триъгълника ABC. През върховете A, B, C са прекарани прави, успоредни на правата DD_1, които пробождат равнините на срещуположните стени съответно в точки A_1, B_1, C_1. Да се докаже, че обемът на тетраедъра $D_1A_1B_1C_1$ е три пъти по-голям от обема на тетраедъра $DABC$.

Остава ли верен този резултат, ако D_1 е произволна вътрешна точка за триъгълника ABC. (ПНР; 9 точки.)

7. На VII международна олимпиада в ГДР през 1965 година

Тема за първия етап:

285. Да се намерят всички реални числа x, принадлежащи на интервала $0\leqq x\leqq 2\pi$, които удовлетворяват неравенствата

$2\cos x\leqq\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqq\sqrt{2}$. (СФРЮ; 4 точки.)

286. Дадена е системата

$$a_{11}\ x_1+a_{12}\ x_2+a_{13}\ x_3=0,$$
$$a_{21}\ x_1+a_{22}\ x_2+a_{23}\ x_3=0,$$
$$a_{31}\ x_1+a_{32}\ x_2+a_{33}\ x_3=0,$$

коефициентите на която удовлетворяват условията:

а) a_{11}, a_{22}, a_{33} са положителни;

б) останалите коефициенти са отрицателни;

в) във всяко уравнение сумата от коефициентите е положителна.

Да се докаже, че $x_1=x_2=x_3=0$ е единственото решение на системата. (ПНР; 6 точки.)

287. Тетраедър $ABCD$ е пресечен с равнина P, успоредна на двата кръстосани ръба AB и CD. Да се намери отношението между обемите на двете части на тетраедъра, ако $AB=a$, $CD=b$, разстоянието между правите AB и CD е d, ъгълът между същите прави е ω и отношението между разстоянията на правите AB и CD до равнината P е k. (ЧССР; 8 точки.)

Тема за втория етап:

288. Да се намерят всички реални числа x_1, x_2, x_3, x_4, за които всяко едно от тях, събрано с произведението на останалите три, дава сума 2. (СССР; 6 точки.)

289. Нека в даден триъгълник OAB ъгълът AOB е остър. От произволна точка M, различна от точката O и лежаща вътре или на контура на $\triangle OAB$, са спуснати перпендикуляри MP и MQ съответно към OA и OB.

Да се намери геометричното място на ортоцентъра H на $\triangle OPQ$, когато точката M описва:

а) страната AB на триъгълника OAB;

б) вътрешността на триъгълника OAB. (СРР; 7 точки.)

290. В една равнина са дадени $n\geq 3$ точки. Диаметър на дадената система точки ще наричаме всяка отсечка, съединяваща две от тях, и дължината d на която е максимална. Да се докаже, че броят на тези диаметри не надминава числото n. (ПНР; 9 точки.)

8. На VIII международна олимпиада в НРБ през 1966 година

Тема за първия етап:

291. На олимпиада били дадени три задачи — A, B и C. 25 ученика решили поне една задача. От учениците, нерешили задачата A, броят на решилите задачата B е два пъти по-голям от броя на решилите задачата C. Учениците, решили само задачата A, са с един повече от останалите ученици, които са решили задачата A. Колко ученици са решили само задачата B, ако половината от учениците, решили само една задача, не са решили задачата A? (СССР; 6 точки.)

292. Да се докаже, че ако страните и ъглите на един триъгълник удовлетворяват равенството

$$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta),$$

то триъгълникът е равнобедрен. (УНР; 7 точки.)

293. Да се докаже, че сумата от разстоянията от центъра на описаната около правилен тетраедър сфера до върховете му е по-малка от сумата от разстоянията на всяка друга точка в пространството до върховете на тетраедъра. (НРБ; 7 точки.)

Тема за втория етап:

294. Да се докаже, че за всяко естествено число n и $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, \ldots, n$; λ е цяло число) е в сила тъждеството

$$\frac{1}{\sin(2x)}+\frac{1}{\sin(4x)}+\ldots+\frac{1}{\sin(2^n x)}=\operatorname{cotg}x-\operatorname{cotg}(2^n x).$$

(СФРЮ; 5 точки.)

295. Да се реши системата

$$\begin{aligned}
a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4&=1,\\
|a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4&=1,\\
|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4&=1,\\
|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3&=1,
\end{aligned}$$

където a_1, a_2, a_3, a_4 са дадени различни реални числа. (ЧССР; 7 точки.)

296. Върху страните AB, BC и CA на триъгълника ABC са взети произволно съответно точките M, K, L, никоя от които не съвпада с върховете на дадения триъгълник. Да се докаже, че лицето на поне един от триъгълниците MAL, KBM, LCK не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на триъгълника ABC. (ПНР; 8 точки.)

9. На IX международна олимпиада в СФРЮ през 1967 година

Тема за първия етап:

297. В успоредника $ABCD$ триъгълникът ABD е остроъгълен. Страната $AB=a$, страната $AD=1$ и $\sphericalangle BAD=\alpha$. Да се докаже, че четирите кръга k_A, k_B, k_C, k_D с радиуси, равни на 1, и с центрове съответно във върховете A, B, C и D покриват успоредника тогава и само тогава, когато е изпълнено условието $a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$. (ПНР; 6 точки.)

298. Да се докаже, че ако само един от ръбовете на някой тетраедър има дължина, по-голяма от 1, то обемът му е по-малък или равен на $\frac{1}{8}$. (ЧССР; 7 точки.)

299. Нека k, m и n са цели положителни числа, като $m+k+1$ е просто число, по-голямо от $n+1$. Да се докаже, че произведението

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\ldots(C_{m+n}-C_k)$$

се дели на произведението $C_1 . C_2 . C_3 . \ldots . C_n$, като се знае, че $C_s = s(s+1)$. (Англия; 8 точки.)

Тема за втория етап:

300. Дадени са триъгълниците $A_0B_0C_0$ и $A'B'C'$, ъглите на които са остри. Да се построи един от триъгълниците ABC, подобни на триъгълника $A'B'C'$ и описани около триъгълника $A_0B_0C_0$, при условие, че правата AB минава през точката C_0, BC минава през A_0, CA минава през B_0 и върховете A, B, C съответствуват респективно на върховете A', B', C'. Измежду казаните триъгълници да се построи този, който има най-голямо лице. (Италия; 6 точки.)

301. Разглежда се редицата $\{c_n\}$, членовете на която се получават чрез равенствата

$$c_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_8,$$
$$c_2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_8^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_8^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

където $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8$ са реални числа, не всички равни на нула. Известно е освен това, че безброй много от членовете на

редицата $\{c_n\}$ са равни на нула. Да се намерят всички n, за които $c_n=0$. (СССР; 7 точки.)

302. На едно спортно състезание, което траяло $n>1$ дни, били раздадени всичко m медала. През първия ден били дадени 1 медал и $\frac{1}{7}$ от останалите след това $m-1$ медала. През втория ден били дадени 2 медала и $\frac{1}{7}$ от останалите след това медали и т. н. През последния n-ти ден били раздадени последните n медала. Колко дни е продължило спортното състезание и колко медала всичко са били раздадени. (УНР; 8 точки.)

10. На X юбилейна международна олимпиада в СССР през 1968 година

Тема за първия етап:

303. Да се докаже, че съществува един единствен триъгълник, дължините на страните на който са последователни естествени числа, а един от ъглите му е два пъти по-голям от един от другите два ъгъла. (СРР; 6 точки.)

304. Да се намерят всички цели положителни числа x, които притежават следното свойство: ако означим с $p(x)$ произведението от цифрите на числото x (в десетична система), то $p(x)=x^2-10x-22$. (ЧССР; 7 точки.)

305. Дадена е системата уравнения:

$$ax_1^2+bx_1+c=x_2,$$
$$ax_2^2+bx_2+c=x_3,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n,$$
$$ax_n^2+bx_n+c=x_1.$$

където a, b, c са дадени реални числа, $a\neq 0$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ са неизвестните. Да се докаже, че системата:

а) Няма реални решения, ако $(b-1)^2-4ac<0$.

б) Има едно единствено реално решение, ако $(b-1)^2-4ac=0$.

в) Има повече от едно реално решение, ако $(b-1)^2-4ac>0$. (НРБ; 7 точки.)

Тема за втория етап:

306. Да се докаже, че всеки тетраедър притежава такъв връх, щото от ръбовете, изхождащи от този връх, може да се построи триъгълник. (ПНР; 5 точки.)

307. Дадена е функцията f, дефинирана за всички реални стойности на аргумента и приемаща реални стойности, която удовлетворява за всяко x равенството

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2},$$

където a е дадено положително число.

а) Да се докаже, че функцията f е периодична, т. е. че съществува такова $b>0$, щото $f(x+b)=f(x)$ за всяко x.

б) Да се посочи пример за такава функция f, която не е константа при $a=1$. (ГДР; 7 точки.)

308. Нека $[x]$ означава цялата част на числото x, т. е. най-голямото цяло число, ненадминаващо x.

Да се пресметне сумата

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\left[\frac{n+2^2}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

за всяко положително число n. (Англия; 8 точки.)