



## ШЕСТНАДЕСЕТА. ЕРФУРТ — ГДР. 1974 ГОДИНА

В отбора, който беше готов да отлети за Германската демократична република, отново влизаха Цанко Дончев и Атанас Найденов. Не може да се каже кога точно Цанко започна да се готви за тази олимпиада, защото след завръщането си от Москва не беше прекъсвал да се занимава. През тази учебна година бе-

ше в десети клас и единственото нещо, на което посвещаваше времето си, беше математиката. Търсеше задачи, четеше литература, участвуващ в състезания. Такива имаше достатъчно. Главното, което вече беше научил, е да разпределя силите и времето си на състезанията. И да не се стъписва пред непознатото. „Бях в добра форма. Работех много и непрекъснато, но не се преуморявах. Тренирал съм лека атлетика и оттам знам, че за всеки етап спортистът трябва да запази сили. Там те учат на това, а тук в математиката сам трябва да го разбереш. Тази година той стигна до отбора никак естествено — без да се вълнува, без да се напряга.

Атанас през миналото лято беше решил да „прескочи“ десети клас. Взе го като частен ученик и сега беше зрелостник. От Софийската математическа гимназия в отбора се класира и Иван Велев. От националната бяха Владимир Симеонов и Манол Илиев. Столичани бяха четирима. От Пловдив двама — Костадин Коручев и Чавдар Дангалчев. От Варна беше Румен Ангелов. Двамата „ветерани“ се готвеха спокойно, уверени бяха в силите си и това не можеше да не се отрази на самочувствието и на останалите. Както по-късно ще видим от резултатите, то не е било без покритие.

През първия ден Цанко бързо и леко се справи с двете задачи. Третата — румънската, го затрудни. Отдели ѝ много време, търси различни начини, опитва няколко идеи, но постигна малко. За работата по нея му присъдиха само две точки. А задачата не беше трудна — трима от нашия отбор я решиха.

„Не отидох на разходка. Легнах и спах през целия ден. Вечерях и отново заспах. Не исках да мисля за задачите.“

През втория ден само за два часа той реши всичко. В резултат получи тридесет и три точки и втора награда.

—Как намери решението?

—Това не мога да обясня. Щом прочетох условията, вече имах идеи и мисля, че много бързо стигнах до резултатите.

Цанко Доичев —  
Русе  
Владимир Симеонов —  
София  
Атанас Найденов —  
София  
Чавдар Дангалчев —  
Пловдив  
Манол Илиев —  
София  
Иван Велев —  
София  
Костадин Коручев —  
Пловдив  
Румен Ангелов —  
Варна



И той започва да коментира решенията — своите и чуждите. Спомня си детайли. И не скрива радостта от успеха си. Горд е и с успехите на своите другари. „Добре се представихме! Една втора и четири трети награди не са малко!“

Трета награда е взел Ч. Дангалчев — четвъртокурсник от електротехникума в Пловдив. Той има 24 точки, но би могъл да има повече. Работил е под ръководството на Румен Грозданов, има богата математическа култура и големи възможности — показал ги е в редица трудни състезания.

Трети награди получават и възпитаниците на Националната математическа гимназия Вл. Симеонов и М. Илиев. Естествено е те да са между най-добрите. Нали там са събрани юноши от цялата страна с вече определени интереси към математиката. Те имат и по-добри условия — повече часове, факултивни занимания, преподаватели от единния център. А в Градската школа с ръководители Л. Чилингирова и Т. Стоилов са в отделна група, защото се смята, че са значително по-напред от останалите ученици.

И Ат. Найденов е получил трета награда за извоювани 24 точки. Сам преценява, че всички задачи са били по силите му. „Единствено липсата на достатъчно време се оказа фатална. Първия ден на най-леката задача имам нула точки, а на другите две — пълния брой. При това бях много близо и до решението на първата, но на чернова. Втория ден също реших две задачи а третата не беше по-трудна от тях.“ Но дали само недостигът на време е причината? Може би при по-добро разпределение на вниманието върху задачите резултатите щяха да бъдат други.

Колкото до времето, то играе роля на всички конкурси, в това число и на олимпиадите, защото никога и никъде в практиката за един математик този фактор няма да има такова значение. Не се отчита времето, за което е решен един научен проблем. А в олимпиадата то е важно и всеки, който се готви за нея, трябва да се съобразява с това.

Костадин Коручев сега е студент по физика. Прието е да се мисли, че едва като студент човек се учи да чете самостоятелно и да навлиза в трънливия път на научното търсене. Но като се послушат разказите на тези момчета, се разбира, че зад гърба си те вече имат дълъг път на развитие. Основното, до което са стигнали, е необходимостта да се трудят, да търсят неуморно, да навлизат с всеки изминат ден все по-дълбоко в същността на нещата, с които се занимават. Коручев посещава школа в седми и осми клас. В колко състезания е участвувал нито той може да каже, нито ръководителят му Р. Грозданов. Състезавал се даже с пионери от Познан — град, побратимен с Пловдив. През



Иван Михайлов —  
София



Любка Чилингирова —  
София



Тодор Стоянов —  
София

1973 г. Грозданов отива асистент в Шумен и групата се разпада, но навикът у Костадин да работи вече е създаден. „Решавах задачите на сп. „Математика“, на сп. „Квант“, търсех сборниците на МНП със задачи от олимпиадите — тогава те бяха малко и трудно се намираха“.

Така със самостоятелна подготовка той стигна до отбора. И до Ерфурт. Малко беше смутен, както Цанко миналата година и както е почти с всеки при първото му участие. Успокоява го мисълта, че има още две години, в които ще може да се състезава... „Задачите бяха познати. Ако ги решавах сам в къщи, сигурно щях да ги решавам. Но обстановката е друга, човек се притеснява. Мислиш все за времето и не успяваш да го използваш пътно. А втория ден в ума ми се въртят всички задачи от първия. Непрекъснато ми се искаше да използвам методи, които вече съм използвал аз или са използвали другите. Объркваш се. Единственото, което ми липсваше, беше спокойствието.“ Познати мисли. В Ерфурт Коручев научи много и от своя опит, и от опита на останалите. А те бяха 140 младежи на неговата възраст, с неговите амбиции, дошли от осемнадесет страни.

Когато Цанко казва, че през годината се е занимавал само с математика, не казва цялата истината. Той е отделил време и за английски език. Това време не е отишло напразно. Вече може да разговаря с повече момчета. Неговият интерес са главно задачите, но често това е повод за едно добро и трайно познанство. „Донесох в Русе материали от много страни. Югославяните ми

дадоха задачите от тяхната вътрешна олимпиада — бяха хубави. Запознах се и с един австриец — Йозеф. Досега си пишем. През 1978 година на връщане от Румъния ми гостува в Русе. Току-що беше завършил математика и щеше да заеме за една година мястото на своя асистент, който заминавал някъде. Беше много радостен. Но не знаеше какво ще работи след това... И с един от холандците кореспондирям. Той следва медицина. А от съветските момчета най-добър беше Грегорян — арменец.

Съветският отбор тази година е недостижим. Постигнал е 45% над средното ниво и е получил две първи, три втори и две трети награди. В Ерфуртската олимпиада по математика за първи път са дошли ученици от Виетнам и Съединените щати. Виетнамците са петима и получават четири награди — една първа, една втора и две трети. Отборът на САЩ е също много силен — всичките му състезатели са на едно ниво — те успяват да постигнат 243 точки от 320 възможни. Две от задачите са значително по-трудни от останалите и са затруднили мнозинството, но журито е присъдило рекорден брой награди — 71! Десет от тях са първи, 24 — втори и 37 — трети.

Всички са единодушни — организацията е била отлична. Нивото на подготовката на всички отбори е било по-добро от предишните години.

На тържественото закриване в Берлин ръководителите на нашия отбор Вл. Чуканов и Д. Серафимов съобщават поканата на МНП, следващата — седемнадесетата олимпиада, да се проведе в България.

### ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА РЕПУБЛИКАНСКИЯ КРЪГ

91. Дадена е редицата  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ , дефинирана по следния начин

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Да се докаже, че  $62 < a_{1974} < 77$ .

92. Даден е триъгълникът  $ABC$ . Върху страните му са построени външно подобни триъгълници  $ABK$ ,  $BCL$ ,  $CAM$  (като  $AB : BC : CA = KA : LB : MC$ ). Да се докаже, че медицентровете на триъгълниците  $ABC$  и  $KLM$  съвпадат.

93. Нека  $n$  и  $k$  са естествени числа,  $k \geq 2$ . Да се докаже, че съществуват  $n$  последователни естествени числа, всяко едно от които се разлага на произведение от поне  $k$  прости множители.

94. Да се намери естествено число  $x$ , определено от равенството:

$$\left[ \sqrt[3]{1} \right] + \left[ \sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[ \sqrt[3]{x^k - 1} \right] = 400.$$

95. В куб с ръб 9 са „хвърлени“ 40<sup>3</sup> правилни<sup>7</sup> петириъгълни призми с основенъръб 1,5 и с височина не по-голяма от 1,4. Да се докаже, че съществува кълбо с радиус 0,5, което лежи в куба и няма общи точки с призмите.
96. В равнина са дадени окръжност  $k$  с център  $O$  и точка  $P$ , лежаща вън от нея. Построени са допирателните  $PQ$  и  $PR$  от точка  $P$  към  $k$  и върху по-малката дъга  $QR$  е избрана произволна точка  $B$  ( $B \neq Q, B \neq R$ ). През точката  $B$  е построена допирателна към  $k$ , която пресича  $PQ$  и  $PR$  съответно в точките  $A$  и  $C$ . Да се докаже, че дължината на отсечката  $QR$  е равна на минималния периметър на вписаните в триъгълника  $OAC$  триъгълници.

### ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА ПОДБОРНИЯ КРЪГ

97. Да се намерят всички естествени числа  $n$  със следното свойство: съществува перmutация  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  на числата 1, 2, ...,  $n$  такава, че ако на кръг ла маса с  $n$  стола седят  $n$  души и за всяко  $k=1, 2, \dots, n$   $k$ -тият човек се премести с  $i_k$  стола надясно, всички ще седнат на различни столове.
98. Нека  $f(x)$  и  $g(x)$  са неконстантни полиноми с цели положителни коефициенти, а  $m$  и  $k$  са дадени естествени числа. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа  $n$ , за които числата  $f(m^n)+g(1), f(m^n)+g(2), \dots, f(m^n)+g(k)$  са съставни.
99. а) Да се намерят всички реални числа  $p$ , за които неравенството  $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geq p(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$  е в сила за произволни реални числа  $x_1, x_2, x_3$ .
- б) Да се намерят всички реални числа  $q$ , за които неравенството  $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \geq q(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4)$  е в сила за произволни реални числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .
100. Да се намери максималният брой фигури, които могат да се разположат върху шахматна дъска с размери  $8 \times 8$  по такъв начин, че никои две фигури да не заемат две квадратчета, лежащи едно до друго по диагонал, успореден или съвпадащ с диагонала A1 — H8. (A1 е долният ляв ъгъл на шахматната дъска, а H8 е горният десен ъгъл на дъската.)
101. Да се намерят всички точки  $M$ , лежащи вътре в даден остроъгълен триъгълник  $ABC$  и такива, че лицето на триъгълника с върхове петите на перпендикулярите, спущени от  $M$  към правите  $BC, CA, AB$ , да е максимално.
102. В триъгълна пирамида  $MABC$  поне два от плоските ъгли при върха  $M$  не са равни помежду си. Да се докаже, че ако ъглополовящите на тези ъгли сключват с ъглополовящата на третия плосък ъгъл равни ъгли, то е изпълнено неравенството:

$$8a_1b_1c_1 \leq a^2 \cdot a_1 + b^2 \cdot b_1 + c^2 \cdot c_1,$$

където  $a, b, c$  са страните на триъгълника  $ABC$ , а  $a_1, b_1, c_1$  са ръбовете, кръстосани съответно с  $a, b, c$ .

### ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА

103. Върху всяка от три карти е написано едно от трите цели числа  $\rho, q, r$ , където  $0 < \rho < q < r$ , при това върху различни карти са написани различни числа. Трима играчи  $A, B$  и  $C$  играят следната игра: картите се разбъркват и се раздават по една на всеки играч. След това всеки играч получава толкова жетона, колкото е било написаното число върху неговата карта. Картите се събират, разбъркват се отново и играта продължава по същия начин.

След като са били изиграни  $N$  кръга,  $N \geq 2$ , се оказало, че  $A$ ,  $B$  и  $C$  са получили съответно по 20, 10 и 9 жетона.

Кой играч е получил в първия кръг  $q$  жетона, ако е известно, че в последния кръг  $B$  е получил  $r$  жетона?

САЩ, 5 точки.

104. Даден е триъгълник  $ABC$ . Да се докаже, че върху отсечката  $AB$  тогава и само тогава съществува точка  $D$ , за която  $CD$  е средно геометрична на  $AD$  и  $BD$ , когато е изпълнено неравенството

$$\sin A \sin B \leq \frac{C}{2}.$$

Финландия, 6 точки.

105. Да се докаже, че за всяко естествено число  $n$

$$\text{числото } \sum_{k=0}^n C^{2k+1} \cdot 2^{3k} \text{ не се дели на 5.}$$

Румъния, 8 точки.

106. Да разгледаме онези разбивания на шахматна дъска, с размери  $8 \times 8$ , на  $p$  правоъгълника, два по два без общи вътрешни точки, които удовлетворяват следните условия:

1<sup>o</sup>. всеки правоъгълник е съставен от цели клетки и съдържа толкова бели клетки, колкото и черни;

2<sup>o</sup>. ако  $a_i$  е броят на белите клетки в  $i$ -тия правоъгълник, то

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_p.$$

Да се намери най-голямата стойност на  $p$ , за която такива разбивания съществуват, и при това максимално  $p$  да се намерят всички рецици  $a_1, a_2, \dots, a_p$ , които могат да се реализират чрез разбиване с тези свойства.

България, 6 точки.

107. Да се намери множеството от всички стойности на събрана

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}, \text{ където } a, b, c \text{ и}$$

$d$  са произволни положителни реални числа.

Холандия, 7 точки.

108. Нека  $P(x)$  е непостоянен полином с цели кофициенти, и нека  $n(P)$  означава броя на всички различни цели числа  $k$ , за които  $[P(k)]^2 = 1$ . Да се докаже, че  $n(P) - \deg(P) \leq 2$ , където  $\deg(P)$  означава степента на полинома  $P(x)$ .

Швеция, 8 точки.