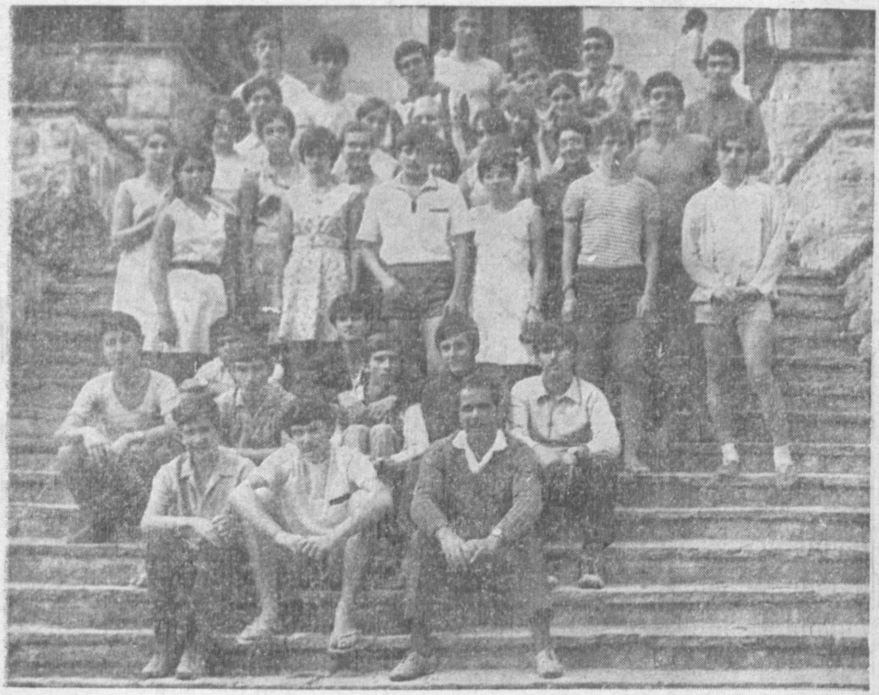
ЧЕТИРИНАДЕСЕТА. ТОРУН — ПОЛША. 1972 ГОДИНА

На подборния кръг този път се явиха осемдесет ученици от двадесет и два окръга. Оказа се, че мнозина от тях са стари познати. Бяха летували заедно в юношеския математически лагер в Хаинбоаз. То беше през късното лято на 1970 година. Домът-паметник на бригадирското движение в Хаинбоаз е разположен високо в Стара планина, на самия път, строен от младежите. Сградата е малка и не може да събере всички, затова в двора бяха построени палатки. Имаше и други трудности — липсваха зали за лекции, семинарните занимания ставаха на някоя поляна, скътана в гората. А огромната черна дъска, без която нито един лектор по математика не би започнал да говори, стоеше на терасата под открито небе. Но нищо не попречи на лекторите да се съсредоточат и на слушателите да внимават. Темите, главно из областта на приложенията на математиката, беше подбрал Бл. Сендов. Той покани преподавателите Г. Христов, В. Попов, Р. Калтинска, Н. Янев, М. Иванчев, Е. Коларова и други и сам изнесе две лекции. Науч-



В Хаинбоаз — между две лекции

ните ръководители бяха в лагера през целия ден. С тях можеше да се срещне всеки и на масата за тенис или шах, и на игрището за баскетбол, и на екскурзиите в планината. Това даваше възможност за дълги и интересни разговори. Всеки можеше да попита за всичко. От сутринта до късна нощ се говореше за математика. Вечер се спореше за конкурса. В обедната почивка се разменяха задачи, обсъждаха се решенията им. Имаше и много игри, и много шеги, и много сериозни занимания. Отговорници на отряди бяха изтъкнати ръководители на школи: Р. Хойнацки, Р. Грозданов, К. Цветков, Н. Гашаров. Това осигуряваше високото качество на семинарните занятия. Обменяха опит и знания и учениците, и ръководителите им. На края си размениха адреси и дълго си писаха, изпращаха си задачи и книги. Ето как в шестнадесетицата се оказаха все приятели.

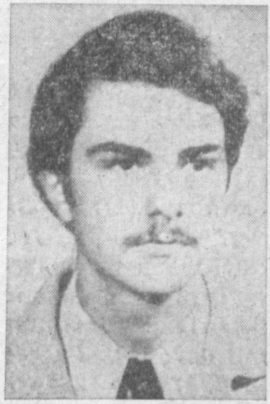
И за още нещо си спомняха с благодарност, когато търсеха причини за успеха — конкурсът на в. „Народна младеж". Много неща научиха момчетата от него. Преди всичко беше интересна системата — можеше да се участвува от кой да е етап нататък, стига да се набере минималният брой точки, необходим за включване в присъствения — „очен" кръг. Получените там точки се умножаваха с коефициент три и така получаваха по-голямо тегло. Съществената помощ за учениците беше тази, че десетина дни след приключване на съответния кръг те получаваха обратно работата си с подробна рецензия и с означен брой точки, които са й присъдени. Всички участвуваха с голямо въодушевление. Задачите се обсъждаха в школите и кръжоците. Около рецензиите и оценките се водеха дълги спорове. Разглеждаха се и теоретични въпроси, свързани с решенията на задачите. Ползата за всички беше безспорна.

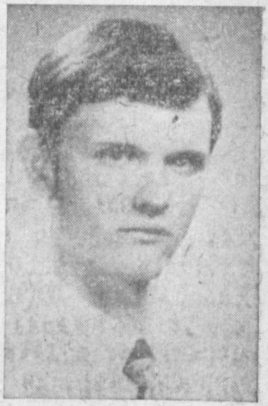
Но и летният лагер, и конкурсът бяха само допълнение към това, което се правеше в школите. Основното си оставаше там. Затова и през 1972 година в осмицата се класираха представители на вече познати школи.

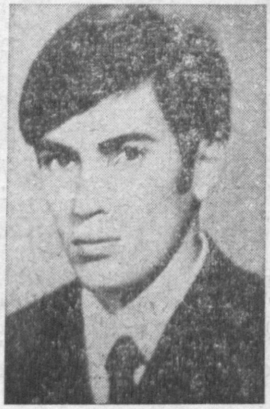
Христо Христов идваше от Велико Търново. Беше много добре подготвен и, както момчетата обичат да казват, „винаги попадаше на хитри решения" и имаше интересни идеи. В Полша изведнъж стана ясно, че знае и полски. А след години, когато бяха вече в университета, всичко се изясни — той беше и много талантлив, и много работлив. На изпитите получаваше все една и съща оценка — отличен.

Огнян Дренски беше от Бургас. Подготвяше се в школата при Любомир Карагьозов. Той не беше първият представител на тази школа в Международнта олимпиада. Вече бяха участвували мно-

Руско Шиков — Ямбол
Камен Иванов — Хасково
Христо Христов — Велико Търново
Илко Първанов — Русе
Димитър Новачев — София
Светозар Петков — Русе
Огнян Дренски — Бургас
Здравко Славов — Ямбол







зина в подготвителните курсове. Трудно е да се каже колко време и сили отделяше Карагьозов за тези момчета. Работеше с тях в училище, водеше ги след това и в дома си. Там беше неговата богата математическа библиотека, до която момчетата имаха „свободен достъп". Всичко беше на тяхно разположение и те се заседяваха до късно през нощта. Така беше почти всеки ден в продължение на много години... Затова, когато Дренски си спомня за него, изговаря името му с особено уважение.

Димитър Новачев е от София. Още като петокласник в Толбухин посещава школа. После учи в Русе и работи в школата при Дочо Дочев. В София е в гимназията с изучаване на английски език. Тук и учителката е много добра, и работата в клас много сериозна, но за Димитър това не е достатъчно. Намира Градската математическа школа и я посещава редовно. Една от пролетните ваканции цялата школа прекарва на лагер в Бояна. „Слушахме лекции, решавахме задачи, спортувахме. Спомням си курса по тригонометрия, който ни прочете др. Бурханларски. За първи път слушах тригонометрия и мисля, че не се е налагало да я уча повече след това. Всичко, което знам, го знам от него. Имахме лекции и при др. Гашаров. Умееше да направи заниманията изключително интересни. В лекциите му преобладаваше теория. Задачите бяха само илюстрация." Димитър пръв припомни и за лагера в Хаинбоаз, и за конкурсите...

Илко Първанов и Светозар Петков представяха тази година русенската школа, Руско Шиков и Здравко Славов — ямболската, а Камен Иванов идваше от Хасково. Всеки от тях можеш много да разказва за работата си до подборния кръг. После бяха заедно. Подготовката им ръководеше доц. Иван Проданов. Лекции четоха К. Джаков, Ив. Димовски, Хр. Лесов, Л. Давидов и Ч. Лозанов. Програмата беше напрегната — много лекции, много задачи.

Домакин на четиринадесетата МОМ беше Полша. Състезанията се проведоха в Торун — университетски град на река Висла, основан през 1231 г. През 1473 година тук е роден създателят на хелиоцентричната система Николай Коперник. Полша, а с нея и целият свят, се готвеше да отбележи достойно 500 годишнината от тази дата. В Торун вече се усещаше юбилейната атмосфера. Беше добре, че точно сега и точно тук щеше да се проведе Четиринадесетата международна олимпиада по математика. Дойдоха средношколци от Австрия, Англия, България, ГДР, Куба (тя се представяше от трима състезатели), Монголия, Полша, Румъния, СССР, Унгария, Холандия, Чехословакия, Швеция и Югославия.

Ръководители на нашата група този път бяха доц. Ив. Проданов и Л. Карагьозов.

Тържественото откриване беше на 10 юли и същия ден се проведе първият тур от състезанието. Задачите имаха оценки съответно 5, 6 и 7 точки. Една от тях беше българска. Но за нашите момчета тя е непозната. Елементи от нея са срещали в други задачи, но тук не се справиха с нея. Не се справиха добре и с другите задачи. Защо? Димитър Новачев си обяснява така: „Бяхме преуморени, липсваше ни самочувствието на другите състезатели; в подготвителния курс получихме много нови знания, но за малкото време, което имахме, не успяхме да ги усвоим така, че да ги използуваме."

Принципът на Дирихле вече не смути нашите състезатели. Те успешно работиха и по системата неравенства.

На задачите от втория ден оценките бяха съответно 7, 7, 8 точки. Веднага се вижда, че бяха по-трудни. Последната беше геометрична. И въпреки че подготовката по геометрия винаги е била добра, този път българският отбор не се справи с геометричните задачи. Момчетата бяха недоволни от себе си. Смятаха, че имат сили за повече...

Това състезание ни донесе две трети награди — Руско Шиков даде добро решение на третата задача и събра общо 29 точки. Камен Иванов реши четвъртата задача и събра 22 точки.

Журито присъди 54 награди: осем първи; шестнадесет втори и и тридесет трети. Единственият участник от отбора на ГДР, който спечели 40 точки, е тринадесетгодишният Павел Крьогер. Той получи и специална награда от журито като най-млад участник. По разказа на доц. Ив. Проданов талантът на това даровито дете е бил открит случайно: за да не го оставя сам в къщи, майка му го водела със себе си на лекции по математика, които тя трябвало да посещава. И момчето скоро показало, че не скучае. Когато се явява на МОМ, той вече владее основните университетски курсове по диференциално и интегрално смятане, алгебра, диференциални уравнения и аналитични функции. Изучава и обща топология с оглед изучаването на функционалния анализ. На олимпиадата в Москва през следващата година той взема една от вторите награди и това е последното му явяване на средношколско състезание. Става студент.

На МОМ в Полша средният успех на българските средношколци беше 21,2%, под средното ниво на участниците. Но както се каза, в тези състезания борбата не се води между състезателите от различните страни. Тя е борба на всеки от тях със задачите. И всеки се завръща оттам проверил себе си в едно сражение.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА РЕПУБЛИКАНСКИЯ КРЪГ

55. Да се докаже, че при произволно цяло число a и естествено число N числото $a^N - a$ се дели на 13, където $N=2^{3^n}-3$.

56. Да се докаже неравенството

$$1+\frac{1}{1!\sqrt{2!}}+\frac{1}{2\sqrt{2!}\sqrt[3]{3!}}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\sqrt[n-1]{(n-1)!}\sqrt[n]{n!}}>\frac{2(n^2+n-1)}{n(n+1)},$$

където n е естествено число, по-голямо от 1.

57. Да се намерят всички цели положителни стойности на n, за които цялата равнина може да се покрие с мрежа, съставена от правилни n-ъгълници.

58. Срещуположните страни AB и CD на вписан в окръжността k четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка M. Допирателната MN $(N \sum k)$ към k е успоредна на диагонала AC, а NB пресича AC в точка P. Да се докаже, че правите AN, DB и PM се пресичат в една точка.

59. На страните BC, CA и AB на остроъгълен триъгълник ABC са построени външно квадрати, чиито центрове са означени съответно с M, N и P. Да се докаже неравенството:

$$S_{\triangle MNP} \geqq \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) S_{\triangle ABC}.$$

Кога се достига равенство?

60. Дадена е пирамида, чиято основа е n-ъгълник, описан около окръжност с център O, който е ортогонална проекция на върха на пирамидата върху равнината на основата. Да се докаже, че ортогоналните проекции на O върху околните стени на пирамидата лежат на една окръжност.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА ПОДБОРНИЯ КРЪГ

61. Да се докаже, че не съществуват цели числа a, b, c, такива, че за всяко цяло x числото $A=(x+a)(x+b)(x+c)-x^3-1$ се дели на 9.

62. Да се реши системата:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y(t-y)}{t-x}-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{\dfrac{z(t-z)}{t-x}-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{x}, \\ \sqrt{\dfrac{z(t-z)}{t-y}-\dfrac{4}{y}}+\sqrt{\dfrac{x(t-x)}{t-y}-\dfrac{4}{y}}=\sqrt{y}; \\ \sqrt{\dfrac{x(t-x)}{t-z}-\dfrac{4}{z}}+\sqrt{\dfrac{y(t-y)}{t-z}-\dfrac{4}{z}}=\sqrt{z} \end{cases}$$

при условията: $0<x<t$, $0<y<t$, $0<z<t$.

63. Да се докаже тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi(2k+1)}{2n}}=n^2,$$ където n е естествено число.

64. Да се намери максималният възможен брой точки, които лежат вътре или върху окръжност с радиус R, така че разстоянието между всеки две от тях да е по-голямо от $R\sqrt{2}$.

65. В окръжност с радиус R е вписан четириъгълник с взаимно перпендикулярни диагонали. От пресечната точка на диагоналите са спуснати перпендикуляри към страните на четириъгълника:

а) да се докаже, че петите P_1, P_2, P_3, P_4 на тези перпендикуляри са върхове на четириъгълник, който е едновременно вписан в някаква окръжност и описан около някаква окръжност;

б) да се докажат неравенствата: $2r_1 \leqq \sqrt{2}R_1 \leqq R$, където R_1 и r_1 са радиусите съответно на описаната и вписаната за $P_1P_2P_3P_4$ окръжности. Кога се получават равенства?

66. Даден е тетраедър $ABCD$, на който две двойки срещуположни ръбове са взаимно перпендикулярни:

а) да се докаже, че четирите височини на $ABCD$ се пресичат в една точка H;

б) да се докаже, че $AH+BH+CH+DH<p+4R$, където p е сумата от дължините на всичките ръбове на $ABCD$, а R е радиусът на описаната около него сфера.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА

67. Дадено е произволно множество от 10 двуцифрени числа. Да се докаже, че това множество притежава поне две непресичащи се подмножества, сумите от елементите на които са равни. *СССР, 5 точки.*

68. Да се докаже, че за всяко естествено $n \geqq 4$ е в сила твърдението: всеки вписан четириъгълник може да се разложи на n четириъгълника, около всеки от които може да се опише окръжност. *Холандия, 6 точки.*

69. Да се докаже, че за произволни цели неотрицателни числа m и n числото $\frac{(2m)!(2n)!}{m!\,n!(m+n)!}$ е цяло. *Англия, 7 точки.*

70. Да се реши системата неравенства:

$$\left|\begin{array}{l}
(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leqq 0,\ x_1>0,\\
(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leqq 0,\ x_2>0,\\
(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leqq 0,\ x_3>0,\\
(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leqq 0,\ x_4>0,\\
(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leqq 0,\ x_5>0.
\end{array}\right.$$

Холандия, 7 точки.

71. Нека функциите f и g са дефинирани върху цялата числова права, приемат реални стойности и $|f(x)|\leqq 1$. Нека освен това за всеки две реални числа x и y е изпълнено равенството $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,.\,g(y)$. Да се докаже, че ако f не е тъждествено равно на нула, то за всяко y е изпълнено неравенството $|g(y)|\leqq 1$. *България, 7 точки.*

72. Дадени са четири успоредни две по две несъвпадащи равнини. Да се докаже, че съществува правилен тетраедър с върхове във всяка от тези равнини. *Англия, 8 точки.*