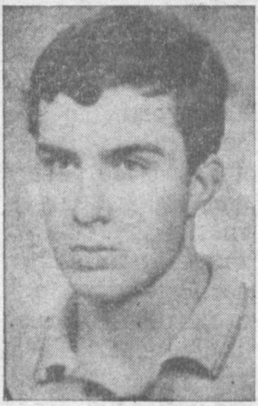
ТРИНАДЕСЕТА. ЖИЛИНА — ЧЕХОСЛОВАКИЯ. 1971 ГОДИНА

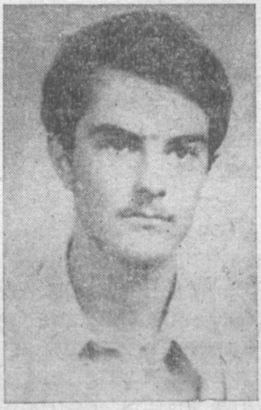
Тази година у нас се провеждаше юбилейната — двадесета Републиканска олимпиада. Участието в нея беше масово. На подборния кръг се явиха 62 първенци от третия кръг. Близо една трета от тях бяха десетокласници, а това радваше, защото е гаранция за високи резултати през следващата година.

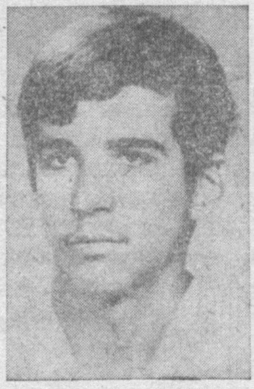
За участие в подготвителния курс се класираха четирима ученици от София, по двама от Русенски и Старозагорски окръзи и по един от Врачански, Хасковски, Пловдивски, Ямболски, Великотърновски, Плевенски, Бургаски и Видински окръзи. Седем от тях бяха десетокласници. Те идваха от най-различни школи и знанията им бяха различни. А имаше само осемнадесет дни за попълване на пропуските и уеднаквяване на знанията. Трудна беше задачата, поставена пред групата научни ръководители, начело на която отново стоеше доц. К. Дочев. С младите състезатели работеха Ив. Проданов, Ив. Димовски, Ч. Лозанов, Л. Давидов, Хр. Лесов и М. Петков.

Работата на доц. К. Дочев беше оставила трайни следи у всеки — „Той внушаваше идеи, подсказваше прийоми, вдъхваше увереност у всеки. Умееше да го прави като никой друг". Всеки трябваше да се представи добре и така да представи страната. Това си спомня Огнян Енчев — сега ст. асистент във ВИММСС — Русе, който беше един от състезателите в отбора. Тук бяха още Илко Първанов от същата школа, Веселин Ангелов и Георги Томанов от София, Иван Радев от Казанлък, Красимир Трифонов от Враца, Светозар Петков от Велико Търново, Здравко Василев от Пловдив. Това беше съставът на групата, която пристигна в Братислава късно през нощта на 9. юли. Посрещнаха ги като скъпи гости. Рано на другия ден отпътуваха за Жилина. Това е малък тих град, в чийто Висш строителен институт се проведе олимпиадата. Но до състезанието имаше три дни, в които журито трябваше да обсъди и подбере задачите. През това време състезателите се разхождаха из Словакия. „Бяхме във Високите Татри, където същата година се проведе европейското първенство по ски, бяхме даже на самата ски-шанца. После се вмъквахме в красиви пещери... В Татрите има много пещери, а домакините ни така горещо желаеха да ни покажат красотата на своята

Огнян Енчев — Русе
Иван Радев — Казанлък
Веселин Ангелов — София
Илко Първанов — Русе
Красимир Трифонов — Враца
Георги Томанов — София
Светозар Петков — Велико Търново
Здравко Василев — Пловдив



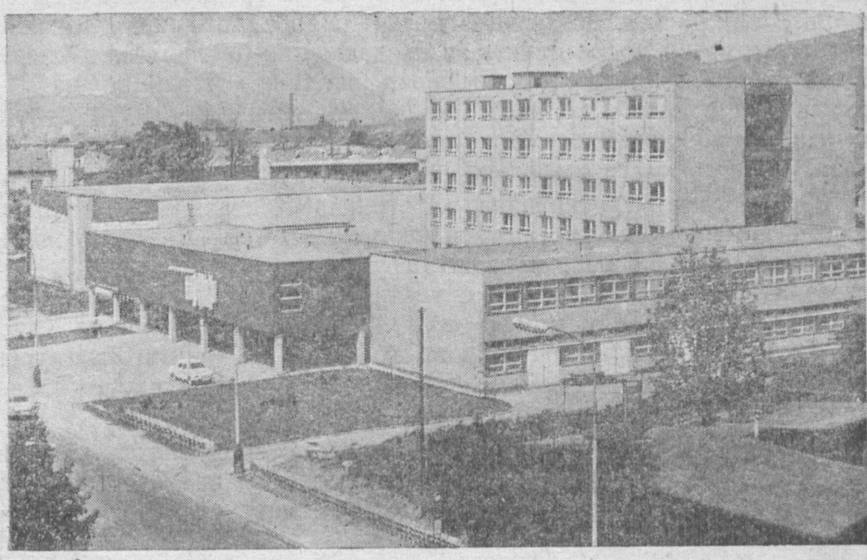

природа, че ние почти забравихме предстоящите състезания. Тези часове останаха незабравими. — Момчетата с усмивка продължават спомените. — Имахме и не толкова приятни преживявания. На връщане, близо до Жилина, автобусът, в който беше и нашата група се обърна в една канавка и трябваше да се измъкваме през задното стъкло. Ранени нямаше, но изплашени имаше доста.“

На другата сутрин започнаха истинските вълнения. Състезателите бяха отрано пред института. Разпределяха ги по стаи — там са само непознати. Непознати са и задачите. Или трудни?

„Не бих твърдил, че задачите бяха особено трудни — казва Огнян, — по-скоро бяха непознати. Макар че всяка задача, която решаваш за първи път, е по своему непозната. Тук за първи път преобладаваха елементи от комбинаторика, която не се учеше в училище, а в школите малко се застъпваше. Нямаше и достатъчно литература по тези въпроси. Аз получавах и „Квант“, и румънското, и унгарското списание по математика за ученици, но такива задачи се срещаха рядко.“

Затруднени са не само българските ученици. От сто и шестнадесет състезатели първата задача са решили само 18, втората — 12, третата — 17, четвъртата — 6, петата — 25, шестата — 12! И тъй, какви са задачите — непознати или трудни? И непознати, и трудни. Такава е оценката на всички след приключване на състезанието.

Висшият строителен институт в гр. Жилина



На закриването в университета „Ян Коменски“ в Братислава акад. Шварц обяви резултатите и награди първенците. Четири от седемте първи награди взеха унгарците. Единственият състезател, който взе максималния брой точки — 40, беше също унгарец. Заводът за мотоциклети в гр. Жилина, шеф на олимпиадата, му подари мотоциклет. Какви емоции предизвика това съобщение! От дванадесетте втори награди пет взеха съветските състезатели и четири унгарските. Присъдени бяха и 29 трети награди и пет за оригинално решени задачи. Три от последните бяха също на унгарците. От нашите момчета най-добре се представиха Огнян и Иван. Но награда този път не получи никой. Ръководителите на нашия отбор разбираха, че трябва да се търсят нови пътища за подготовка на състезателите. Пътя, по който вървяха Унгария, ГДР и някои други страни — да подготвят през цялата година само участниците в отбора — ние не желаехме да приемем. Нашата цел беше друга — масово да се подготвят учениците от цялата страна, а на Международната олимпиада да се изпращат най-добре представилите се. От този път ние не бивате да се отклоняваме. Другаде трябваше да се търси разковничето. Трябваше да се обозре опитът, а опитът — това бяха задачите, давани на МОМ или предлагани на Международното жури. Анализираха се задачите, като се обръщаше особено внимание на методите, с които се решават. Беше установено, че някои от тези методи, като принципът на Дирихле, въобще не се учат у нас и не са разработвани в издаваната литература за средношколци. Следващите олимпиади показаха и други подобни празнини. Така по естествен начин дойде идеята за създаване на библиотека „Алеф“. Неин инициатор и автор на първото заглавие „Принцип на Дирихле“ беше Иван Проданов. За няколко години излязоха редица книги, които допринесоха и ще допринасят за подготовката на тези ученици, които имат желание да напредват в математиката.

Тържественото закриване на тринадесетата Международна олимпиада по математика стана рано след обед. До заминаването имаше няколко часа и нашата група се разхождаше из Братислава. С тъга се прощаваше с този чуден град. Вървяха по брега на Дунава. В един момент се озоваха пред паметник на Христо Ботев. Досущ като тези, които имаме във всеки български град. И строфата — така позната и винаги вълнуваща — „Тоз, който падне в бой за свобода...“!

„Имам чувството, че съм у дома — в Русе“ — казва Огнян. И разговорите се насочват към това, което им предстои след завръщането — то пак ще бъде свързано с математиката.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА РЕПУБЛИКАНСКИЯ КРЪГ

37. Да се докаже, че уравнението

$$x^{12}-11\,y^{12}+3\,z^{12}-8\,t^{12}=1971^{1970}$$

няма решение в цели числа.

38. Решете всяка една от системите:

а) $\left| \begin{array}{l} x=\dfrac{2y}{1+y^2}, \\ y=\dfrac{2z}{1+z^2}, \\ z=\dfrac{2x}{1+x^2}; \end{array} \right.$ б) $\left| \begin{array}{l} x=\dfrac{2y}{1-y^2}, \\ y=\dfrac{2z}{1-z^2}, \\ z=\dfrac{2x}{1-x^2}, \end{array} \right.$

(x, y, z са реални числа).

39. Нека Е е система от 17 отсечки върху една права. Докажете, че: а) или съществува подсистема на Е от 5 отсечки, които при подходящо подреждане се включват монотонно една в друга (първата във втората, втората — в следващата и т. н.); б) или могат да се намерят 5 отсечки от Е, измежду които нито една не се съдържа в някоя от останалите 4.

40. При какви условия за реалните числа a, b, c уравнението $a\cos x+b\sin x=c$ има две решения x' и x'', за които разликата $x'-x''$ не е кратна на π и $x'+x''=\alpha+2k\pi$, където α е дадено число и k е цяло число?

41. Да се докаже, че ако в един триъгълник две от ъглополовящите са равни, то той е равнобедрен.

42. Даден е куб с ръб a. На разстояние $\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ от центъра на куба е прекарана равнина, перпендикулярна на един негов диагонал:

а) определете вида на полученото сечение;

б) изчислете лицето на сечението.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА ПОДБОРНИЯ КРЪГ

43. Едно естествено число се нарича триъгълно, ако може да се представи във вида $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Да се намерят стойностите на $a\,(1\leqq a\leqq 9)$, за които съществува триъгълно число, всичките цифри на което са равни на a.

44. Да се докаже, че уравнението

$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt[3]{3-x^3}=0$$

няма реални корени.

45. Дадени са 20 точки в равнината, никои три от които не лежат на една права. Да се докаже, че съществуват поне 969 изпъкнали четириъгълника с върхове тези точки.

46. Даден е триъгълникът ABC. Нека R е радиусът на описаната около него окръжност, а O_1, O_2, O_3 са центровете на външновписаните в триъгълника ABC окръжности. С q е означен периметърът на триъгълника $O_1O_2O_3$. Да се докаже, че $q\leqq 6\sqrt{3}\,R$.

Кога се получава равенство?

47. Нека $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ са върховете на правилен $2n$-ъгълник и P е точка от вписаната в този многоъгълник окръжност. Полагаме $\alpha_i = \sphericalangle A_i P A_{i+n}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tg}^2 \alpha_i = 2n \frac{\cos^2 \dfrac{\pi}{2n}}{\sin^4 \dfrac{\pi}{2n}}.$$

48. В триъгълна пирамида $SABC$ един от равнинните ъгли при върха S е прав. Дадено е още, че ортогоналната проекция на S върху равнината на основата ABC съвпада с пресечната точка на височините на триъгълника ABC. Да означим $SA=m$, $SB=n$, $SC=p$ и с r радиуса на вписаната окръжност в основата на пирамидата, а с H — височината на пирамидата. Нека r_1, r_2, r_3 са радиусите на вписаните окръжности в сеченията на пирамидата с равнини, минаващи по околните ръбове SA, SB, SC и височината на пирамидата. Да се докаже, че:

а) $m^2+n^2+p^2 \geqq 18\, r^2$;

б) $\dfrac{r_1}{H}$, $\dfrac{r_2}{H}$, $\dfrac{r_3}{H}$ се намират в интервала (0,4; 0,5).

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА

49. Нека n е естествено число, по-голямо от 2. Да се докаже, че твърдението за произволни реални числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е в сила неравенството

$$(a_1-a_2).(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)+(a_2-a_1).(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)$$
$$+(a_n-a_1).(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}) \geqq 0$$

е вярно при $n=3$ и $n=5$ и не е вярно за никоя друга стойност на n.

Унгария, 5 точки.

50. Даден е изпъкнал многостен P_1 с точно девет върха $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_9$. Да означим с $P_2, P_3, \ldots, P_9$ многостените, получени от P_1 чрез транслации, при които точката A_1 преминава съответно в точките $A_2, A_3, \ldots, A_9$. Да се докаже, че поне два от многостените $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_9$ имат най-малко една обща вътрешна точка. *СССР, 7 точки.*

51. Да се докаже, че редицата с общ член 2^n-3 $(n=2, 3, \ldots)$ съдържа безбройно много числа, всеки две от които са взаимно прости. *Полша, 9 точки.*

52. В тетраедъра $ABCD$ всички стени са остроъгълни триъгълници. Нека $XYZTX$ са всички затворени начупени линии, които са определени по следния начин: X е точка от ръба AB, несъвпадаща с A и B, аналогично Y, Z и T са вътрешни точки съответно от ръбовете BC, CD и DA. Да се докаже, че:

а) ако $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, то измежду тези начупени линии няма такава с най-малка дължина;

б) ако $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, то съществуват безбройно много начупени линии с минимална дължина и тази минимална дължина е равна на $2AC \sin \dfrac{\alpha}{2}$, където $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$. *Холандия, 6 точки.*

53. Да се докаже, че за всяко естествено число m съществува крайно множество M от точки в равнината такова, че за произволна точка A от M да има точно m точки от M, които са отдалечени от A на разстояние единица.

България, 7 точки.

54. Дадена е квадратната таблица:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}, \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}, \end{matrix}$$

(a_{ij} означава елемента от i-тия ред и j-тия стълб на таблицата), която се състои от цели неотрицателни числа, удовлетворяващи условието: винаги, когато $a_{ij}=0$, е в сила неравенството $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\ldots+a_{nj}\geq n$.

Да се докаже, че сборът на всички елементи на таблицата е не по-малък от $\frac{1}{2}n^2$.

Швеция, 8 точки.