ДВАНАДЕСЕТА. БУДАПЕЩА — УНГАРИЯ. 1970 ГОДИНА

Работата по съставяне на отбора за XII международна олимпиада по математика е приключена. Класирани са „ветераните“ Вирджиния Христова и Степан Терзиян от Русе, Антон Моллов, Пламен Сидеров и Илия Калдерон от Ямбол, Валентин Маринов от Велико Търново, Милен Димчев от Бургас и Христо Вулов от Горна Оряховица.

Явно силите от Ямбол са взели връх. Работата на учителя Роман Хойнацки дава своите плодове. Четири години той работи с тях. Беше ги взел осмокласници — почти деца. Кога беше това?..

Беше през 1965 година. Вече се говореше за успехите на Математическата школа в Русе, за работата на Дочо Дочев. „Помислих си, че талантливите деца не се раждат само в един град — разказва Хойнацки, — сигурно са равномерно разпределени в страната. Така трябва да бъде и съгласно теорията на вероятностите. Реших и аз да създам кръжок.“

И го създава. Той разбира, че за да се получи добра реколта, е нужна добра почва, но тя трябва и добре да се оре, сее и копае. Да преподаваш математика е трудна и много отговорна работа, но да събереш най-добрите и да ги учиш на нестандартно мислене, да им помогнеш „да ходят“ в един „трудно прохо-

Степан Терзиян — Русе

Илия Калдерон — Ямбол

Вирджиния Христова — Русе

Валентин Маринов — Велико Търново

Пламен Сидеров — Ямбол

Христо Вулов — Горна Оряховица

Антон Моллов — Ямбол

Доц. Дочо Дочев — Русе

з.у. Роман Хойнацки — Ямбол

дим" терен е много по-тежко и много по-отговорно. Хойнацки започва със събиране на трудни и интересни задачи. Решава ги сам. Когато не успее, търси теория, чете и отново решава.

В началото на 1966/67 учебна година създава кръжока. Децата подбира бавно, внимателно. Обикаля основните училища, разговаря с учителите, с родителите и с децата. И започва.

„Според мен главното условие за добра работа са стимулите — многократно подчертава Хойнацки — и най-добрият стимул е възможността за изява. Сега се използува друга дума — реализация. Мисля, че е същото." И той търси места за изява на своите ученици. Участвуват в конкурса на Радио София, решават задачите от сп. „Математика", от сп. „Математика в школе", задачи, давани на олимпиади. После се организират състезанията в Казанлък, а още по-късно те самите стават домакини на конкурса „Ат. Радев".

„Не е достатъчно само участието, нужна е добра разгласа на резултатите" — до този извод стига Хойнацки. Такава възможност даваше конкурсът на в. „Народна младеж". Когато на страниците му се появяват първите задачи, всички негови кръжочници се включват най-активно. Решават, изпращат решенията и с нетърпение очакват резултатите. В Ямбол броевете на вестника не достигат. Купуват го не само участниците в конкурса, а всички ученици. Всеки търси да срещне там познати имена.

Когато премисля всяка стъпка по пътя към математическата професия, асистентът по методика на математиката в Шуменския университет Антон Моллов не пропуска да отбележи мястото и ролята на системната работа в клас, на самостоятелната работа, на умението да се ползува математическа литература, на възможността да премериш в кръжока силите си със силите на своите връстници... „Всичко това добре беше разбрал нашият учител — др. Хойнацки, и вещо ни ръководеше. Той ми създаде навика всекидневно да минавам през книжарниците, да не пропускам списанията „Математика", „Квант", „Математика и физика", „Математика в школе". Той ми беше и класен ръководител. Нашата паралелка се открояваше от останалите по разностранност на интересите, трудолюбието и творческите си стремежи. Трите години в гимназията бяха едно непрекъснато съревнование помежду ни за повече знания, за повече решени задачи, за повече и по-интересни решения на една и съща задача. Но съперничество в лошия смисъл на тази дума нямаше. Радвахме се на успехите на всеки. Бяхме сплотен колектив, в който нямаше място за изоставащи. Другарят Хойнацки и колективът, създаден от него, са двата решаващи фактора, определили моя жизнен път."

Хойнацки не им помага в решаването на задачите. Не се вмесва пряко в работата на младия човек. Насочва го и го оставя сам да се справя с проблема, за да вкуси от удоволствието на успеха. Той подкрепя, насърчава, вдъхва увереност в силите. Син на учител по математика и баща на студент по математика, заслужилият учител Роман Хойнацки е само един от редицата наши изтъкнати учители. Разказахме за него, но можеше със същия успех да разкажем за Дочо Дочев от Русе, за Кольо Горчев от

Кольо Горчев —
Казанлък

Румен Грозданов —
Пловдив

Николай Високов —
Велико Търново

Любомир Карагьозов —
Бургас

Косьо Косев —
Ямбол

Иван Стоянов —
Велико Търново

Казанлък, за Румен Грозданов от Пловдив, за Николай Високов от Велико Търново, за Л. Карагьозов от Бургас и за много други. И тук се изкушаваме да подкрепим тази мисъл с избадка от писмото на Валентин Маринов — сега архитект в Пловдив.

„Във втора гимназия аз намерих това, което Националната математическа гимназия едва ли щеше да ми даде. Тук срещнах учителя по математика и мой класен ръководител Николай Високов. Искам да го нарека моя УЧИТЕЛ. Смятам, че той не е получил от мен това, което му дължа като благодарност. Бих се радвал, ако ме наричат „ученик на Высоков“. А тогава далеч не споделях сегашното си мнение. Неведнъж сме били в „конфликт“. Сега разбирам, че не съм бил прав, защото всичко е било в името на математиката. Най-главното, за което съм му признателен, е, че успя да ми предаде своята безкористна любов към математиката и да ме зарази с ентусиазма и амбицията си. Той никога не беше напълно доволен, рядко раздаваше похвали и ни караше да разберем, че далеч не сме постигнали това, на което сме способни. В математиката ни третираше като равни нему — заедно търсехме решенията на задачите. Освен участието в олимпиадите, той ни подканяше да участвуваме в конкурсите на сп. „Математика“, организираше двустранни срещи с ученици от други училища, водеше ни на състезанията в Казанлък. За това доколко др. Високов бе успял да ни пристрасти към математиката, ми напомня един случай, който и досега не мога да забравя. Една от задачите в сборника по планиметрия за IX клас (спомням си даже и номера ѝ — 139) се беше оказала особено трудна. Моят учител непрекъснато подклаждаше амбициите ми, не ми сервира решението и аз толкова се бях вживял, че я реших насън. Просто сутринта се събудих с готов чертеж в главата и ясно решение.

От другаря Високов за първи път чух за МОМ. Тогава във Велико Търново се поставяше основата на една добра традиция за представянето в подборния кръг. Когато аз бях в IX кл., единадесетокласникът Николай Кутев се класира седми в републи-

Захари Божинов —
Видин

Тянко Петров —
Хасково

Таньо Танев —
Казанлък

канския кръг и замина за Москва за участие в МОМ. На следващата година Владимир Тодоров взе участие в олимпиадата в Букурещ. Същата година аз стигнах до републиканския кръг и, макар че бях извън призовата десятка поради непознаване на материала за XI кл. (аз бях в десети), придобих много ценен опит и увереност в силите си. През 1970 г. бях трети на републиканския кръг и взех участие в олимпиадата в Унгария."

Тук се изкушаваме да дадем още един откъс от писмото на В. Маринов, което ни се струва ще бъде интересно на нашите млади читатели:

„Какво дължа на математиката? За себе си бих разделил този въпрос на два и първият от тях засяга участието ми в математическите олимпиади. Определено мога да кажа, че участието ми в олимпиадите спомагаше за формиране на определени качества — воля, амбиция, умение да се изгражда тактика на цялостния подход към всички задачи (цялото) и към всяка една (частното). Тук мога да направя един може би неочакван, а може би съвсем логичен паралел — спорта. Аз се занимавах с различни видове спорт и около десет години активно с лека атлетика — хвърляне на копие. Склонен съм да отдам много от успехите си в двете направления на връзката, която правех между тях. От олимпиадите пренесох в спортното състезание всичко онова, което бях акумулирал като „правила на борбата". Обратно — в залата, в която се провеждаше олимпиадата, влизах като на стадиона — с предварителната нагласа на спортист и до края, до последната минута не ме оставяше този нерв, който на спортен език се нарича спортна злоба. Запомнил съм два характерни случая: в петък, събота и неделя трябваше да участвувам в едно състезание в Шумен — първото за сезона, за което се чувствувах добре подготвен. В понеделник и вторник щеше да се състои третият кръг на националната олимпиада, който щеше да определи кандидатите за подборния кръг в София. Баща ми и майка ми се обявиха против моето заминаване на състезанието в Шумен, като смятаха, че то ще попречи на подготовката ми за олимпиадата. Аз обаче се наложих и заминах с една чанта, пълна със сборници и спортни екипи. Тъй като „копието" се състоя в неделя, двата дни преди това за учудване на съотборниците си аз прекарах в хотела над задачите. Мнозина бяха склонни да ми се присмеят, но в неделя подобрих личното си постижение с цели пет метра, класирах се отлично и, уверен съм, това много ми помогна на олимпиадата да набера 38 от 40 възможни точки и да се класирам за следващия кръг. Същата година станах републикански шампион за юноши в дисциплината хвърляне на копие и с 33 от

40 възможни точки влязох в отбора за МОМ. Тогава за втори път ми се наложи да правя избор — подготвителният курс за Международната олимпиада и датата за нейното провеждане съвпадаха с предварителния лагер-сбор и датата за провеждане на балканските игри по лека атлетика за юноши и девойки, където трябваше да участвувам като титуляр в хвърлянето на копие. Това бе първият и единствен случай, когато едното попречи на другото. Впрочем това не беше единственото съвпадение. Бях решил да кандидатствувам архитектура. Трябваше да положа два изпита — по математика и рисуване. Датите и на двата съвпадаха с МОМ. Сам не успях да разреша противоречието и тогава др. Д. Серафимов ми уреди среща с Министъра на просветата Стефан Василев. След като се запозна с проблема, думите на др. Василев бяха — „Математици са нужни не само на математиката“ и още веднъж ми стисна ръката. Изпитът по математика ми бе признат за взет с „отличен“, а на рисуването се явих на предварителна дата. Думите на министъра запомних завинаги и в един момент те определиха по-нататъшната ми съдба.

Другият въпрос е кои свои качества дължа на математиката. Аз бих отговорил — начина на мислене. Неведнъж съм мислил върху това и може би фактът, че се откъснах от чистата математика, ми помогна да го осъзная. Макар да съзирам опасността в разсъжденията ми да се почувствува дилетанта, познал само елементарната математика, ще си позволя един опит за обобщение. Математиката е един универсален модел на света и в този смисъл бих сравнил непрекъснатото взаимодействие между човека и заобикалящата го среда с решаването на задачи от елементарната математика. В такъв случай ясно е колко е важно да се мисли математически. Моята професия — архитектурата, не веднъж ми е предоставяла възможността да се уверя в правилността на подобна констатация. Всяка сграда, комплекс или какъвто и да е обект за проектиране съдържа в себе си решението на една задача, макар че повечето от моите колеги ще възразят, ако се потърси аналогия между архитектурата и математиката. Аз, разбира се, виждам връзката даже по-тясна — всички архитектурни конкурси, в които съм участвувал или ми предстои да участвувам, са и ще бъдат за мен продължението на това, което съм научил в математическите олимпиади.

Така че в мен се води борба между две противоречиви чувства. Едното е свързано с математиката като спомен — в него МОМ е върхът и краят... Другото чувство е обратното — с математиката не е скъсано. Тепърва ми предстои да реализирам в живота и професията си върха на своето развите като математик, така че това, което съм научил и с което съм започнал някога на математическите олимпиади, все още не е завършило. В момента по линия на ТНТМ се занимавам с възможностите за включване на ЕИМ в архитектурното проектиране, нещо, което има малко привърженици и много противници сред колегите архитекти, смятащи архитектурата за изкуство и недопускащи възможността да се подчини изкуството на алгоритми. В този смисъл смятам, че математиката ще бъде и моя съдба."

Така мисли архитект Валентин Маринов през 1979 година. А през 1970 Валентин е в залата и край него са заели места състезателите от Австрия, Англия, ГДР, Монголия, Полша, Румъния, СССР, Унгария, Франция, Холандия, Чехословакия, Швеция, Югославия. Младежите се вълнуват. Неспокойни са и ръководителите на нашия отбор — доц. К. Дочев и Д. Серафимов. Те знаят, че за малкото време, през което тези осем души бяха подготвяни, не можеше да се даде всичко, което не знаеха поради различия в учебните програми с другите страни. Главното беше всеки да работи според силите и възможностите си. Главното бяха психическата нагласа, спокойствието, духът.

И домакините се бяха погрижили за това. Настанили ги бяха в Техникума по обществено хранене в гр. Кестхей, на брега на Балатонското езеро.

Събрани от различни краища на света, говорещи различни езици, с различен мироглед, с различна култура и различно ниво на математическа подготовка, младежите бързо намериха общ език — математиката. За няколко дни всички прегради бяха преодолени, чувствуваха се като стари приятели. Състезателният дух беше еднакъв и в класните стаи, и на импровизираните спортни срещи. Възможността да проявиш досетливост, остроумие и находчивост се ценеше навсякъде еднакво. Даже в столовата, докато връстниците сервитьори и готвачи приготвят обяда, един отбор окачи националното знаменце, маркиращо мястото му, върху завесата на съседния прозорец; нашият отбор окачи българския трибагреник в горния край на завесата до нашата маса. Най-остроумни се оказаха французите — те закачиха своето знаме в долния край на щората и под звуците на Марсилезата, изпълнявана от целия отбор, един младеж бавно издърпа въженцето и знамето се издигна нагоре.

Докато журито преглеждаше работите и уточняваше оценките, младежите се запознаха със забележителностите на Будапеща.

Закриването стана в една зала на Политехниката. Проф. Янош Шурани, председател на международното жури, направи оценка на работата. Бяха определени 58 награди: седем първи, единаде-

Българският отбор с част от съветските състезатели

сет втори и четиридесет трети. Три от последните са на нашия отбор. Милен Димчев и Степан Терзиян са получили по 24 точки, а Илия Калдерон — 21.

Задачите се оказаха трудни за всички. Степан е решил бързо първата и петата, повече време е отделил за втората и четвъртата, с която се е справил частично. Затруднили са го третата и шестата задачи. Всъщност за третата той е имал идея, но не е успял да я реализира — слабо е познавал теорията, която му е необходима. Пламен е решил изцяло четвъртата — веднага попада на решението и си го спомня до днес. И Виржиния бързо се е справила с нея. Тя от опит знае, че на всяко състезание има както задачи, които ѝ допадат и са близки до нейните интереси, така и задачи, които я намират в известна степен неподготвена, не са по „вкуса" ѝ. Тогава се налага да направи каквото е по силите ѝ, за да се доближи до решението. А се случва да дадат и твърде трудни, и съвсем непознати задачи. Такава през тази година беше шестата. От нашите състезатели никой не е я решил. Само 16 от сто и дванадесетте участници са се справили с тази задача. Първенци са домакините. Средният успех на състезател от унгарския отбор е с 49% над средното ниво на участниците. Това не е изненада за никого — те винаги са били между най-силните. След тях са СССР (с 42% над средното ниво) и ГДР (с 35,4%). Нашият отбор е с 5,1% под средното ниво. След него са отборите на Австрия, Полша, Франция и др.

Вече всеки си е у дома. Ръководителите могат да направят равносметка. Тя показва, че е необходима още много работа, по-задълбочена и на по-широк фронт. Равносметка си правят и учениците... Това беше последната им ученическа изява. Сега са студенти. След подборния кръг са получили правото да учат математика, без да се явяват на приемен изпит. Но ще свържат ли всички завинаги съдбата си с математиката? Ще бъде ли олимпиадата стъпало в тяхното развитие или ще остане връх, до който са стигнали и са спрели?

Минали са десет години. Времето не е разбило другарството, споено в онези горещи юлски дни. Те са добри колеги и добри приятели.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА РЕПУБЛИКАНСКИЯ КРЪГ

19. Да се докаже неравенството $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\geqq\frac{3}{2}$,

където $\alpha\geqq0$, $\beta\geqq0$, $\gamma\geqq0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

20. Да разгледаме числата $a=123\ 456\ 789$ и $b=987\ 654\ 321$. Да се намери:

а) най-големият общ делител на a и b;

б) остатъкът, който се получава, като се раздели най-малкото общо кратно на a и b с числото 11.

21. Точките от равнината по някакъв начин са разделени на три вида: „бели", „зелени" и „червени". Да се докаже, че съществува поне една двойка едноцветни точки (от един и същ вид), които са на разстояние единица.

22. Във вътрешността на триъгълника ABC е взета произволна точка M и през нея са прекарани прави, успоредни на страните на триъгълника. Тези прави отсичат от триъгълника ABC три по-малки триъгълници, като един от върховете на всеки от тях е връх на дадения триъгълник. Нека с P_a, P_b, P_c са означени периметрите, с S_a, S_b, S_c — лицата на тези триъгълници, а P и S са съответно периметърът и лицето на триъгълника ABC. Да се докаже, че:

а) $P=\frac{P_a+P_b+P_c}{2}$; б) $\sqrt{S}=\frac{\sqrt{S_a}+\sqrt{S_b}+\sqrt{S_c}}{2}$.

23. Без логаритмична таблица да се пресметне

$$S_n(\alpha)=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\sin 9\alpha}+\ldots+\frac{\cos 2.3^{n-1}\alpha}{\sin 3^n\alpha}$$

за $\alpha=18°$, където n е естествено число от вида $1+4k$.

24. Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, на която най-късото разстояние между AA_1 и BD_1 има дължина $8m$, а разстоянието от върха A_1 до равнината на триъгълника ACB_1 е $\frac{24m}{\sqrt{13}}$. През средите на основните ръбове AB и BC е прекарано сечение, което разделя оста на призмата в отношение 1:3, считано от равнината на долната основа ($ABCD$):

а) да се определи видът на сечението; б) да се намери лицето на сечението.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА ПОДБОРНИЯ КРЪГ

25. Намерете всички естествени числа $a>1$, които притежават свойството: всеки прост делител на a^6-1 дели поне едно от числата a^3-1, a^2-1.

26. Двама велосипедисти изминали разстоянието от A до B, което е 100 km, със скорост 30 km/h, като първият тръгнал от A половин час преди втория. 20 минути след тръгването на първия от A тръгнала контролна кола, която се движила със скорост 90 km/h, настигнала първия велосипедист и се движила 10 min заедно с него; върнала се със скорост 90 km/h към втория и се движила 10 min заедно с него; след това потеглила със скорост 90 km/h към първия велосипедист и т. н. — до края на маршрута. Колко пъти колата се е движила заедно с първия велосипедист?

27. Върху шахматна дъска (която има 64 полета) са разположени 32 бели и 32 черни пулове. Казваме, че два пула образуват смесена двойка, когато са разноцветни и лежат на един и същ ред или стълб. Намерете максимума и минимума на броя на смесените двойки при всевъзможните разположения на пуловете.

28. Нека $\delta_0=\triangle A_0B_0C_0$ да означава триъгълник с върхове A_0, B_0, C_0. Върху всяка от страните B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 построяваме квадрат в полуравнината, несъдържаща съответния противоположен връх A_0, B_0, C_0 и нека A_1, B_1, C_1 са центровете на така построените квадрати. Ползувайки триъгълника $\delta_1=\triangle A_1B_1C_1$ построяваме по същия начин триъгълник $\delta_2=\triangle A_2B_2C_2$, от $\delta_2=\triangle A_2B_2C_2$ построяваме $\delta_3=\triangle A_3B_3C_3$ и т. н. Докажете, че:

а) отсечките A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 са съответно равни и перпендикулярни на B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1;

б) върховете A_1, B_1, C_1 на триъгълника δ_1 лежат съответно върху отсечките A_0A_3, B_0B_3, C_0C_3, определени от върховете на δ_0 и δ_3, като ги делят в отношение 2:1.

29. Докажете, че при $n\geqq 5$ страната на правилния вписан в една окръжност n-ъгълник е по-голяма от страната на правилния описан около същата окръжност $n+1$-ъгълник. Докажете, че при $n\leqq 4$ е в сила обратното неравенство.

30. В пространството са дадени точките A, B, C и сфера с център O и радиус 1. Намерете точките X от сферата, за които сумата $f(X)=|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2$ от квадратите на разстоянията от точката X до точките A, B, C приема съответно най-голяма и най-малка стойност. Покажете, че ако отсечките OA, OB, OC са две по две перпендикулярни и d е разстоянието от центъра O до центъра на тежестта на триъгълника ABC, то:

а) максимумът на $f(X)$ е $9d^2+3+6d$;

б) минимумът на $f(X)$ е $9d^2+3-6d$.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА

31. Даден е триъгълникът ABC и точка M, лежаща на страната AB. Нека r_1, r_2, r са радиусите на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците AMC, BMC и ABC; ρ_1, ρ_2, ρ са радиусите на окръжностите, които лежат в $\sphericalangle ACB$ и са външно вписани съответно за триъгълниците AMC, BMC и ABC. Докажете, че $\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}$.

Полша, 5 точки.

32. Нека a, b и n са естествени числа, по-големи от единица. Числата a и b са взети за основи на две позиционни системи за записване на целите числа. Две числа A_n и B_n имат едно и също представяне $\overline{X_n X_{n-1} \ldots X_1 X_0}$ в системата с основа a и в системата с основа b. Предполагаме, че $X_n \neq 0$ и $X_{n-1} \neq 0$. Числата, които се получават от A_n и B_n чрез зачеркване на първата цифра X_n ще означаваме съответно с A_{n-1} и B_{n-1}. Да се докаже, че $a > b$ тогава и само тогава, когато

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Румъния, 7 точки.

33. Редицата от реални числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удовлетворява условието $1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$ Редицата $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ е дефинирана чрез равенството

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}. \tag{1}$$

Докажете, че

а) за всяко n $0 \leqq b_n < 2$;

б) за всяко c, $0 \leqq c < r$, съществува редица $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, удовлетворяваща (1) и такава, че $b_n > c$ за безбройно много стойности на индекса n.

Швеция, 8 точки.

34. Намерете всички цели положителни числа n, притежаващи следното свойство: множеството $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ може да се раздели на две подмножества (на две части) така, че произведението от всички елементи на едното множество да бъде равно на произведението от всички елементи на другото.

Чехословакия, 6 точки.

35. В тетраедъра $ABCD$ $DB \perp DC$ и петата на перпендикуляра, спуснат от D към равнината на триъгълника ABC, съвпада с ортоцентъра на този триъгълник.

Докажете, че $(AB+BC+CA)^2 \leqq 6\,(AD^2+BD^2+CD^2)$.

За кои тетраедри е изпълнено равенството? *България, 6 точки.*

36. В равнината са дадени 100 точки, никои три от които не лежат на една права. Разглеждаме всевъзможните триъгълници, с върхове тези точки. Да се докаже, че най-много 70 % от разглежданите триъгълници могат да бъдат остроъгълни.

СССР, 8 точки.