ЕДИНАДЕСЕТА. БУКУРЕЩ — РУМЪНИЯ. 1969 ГОДИНА

Юни 1969 година. Прозорците на голямата зала на Централния комитет на Комсомола в София са широко отворени. Не е горещо, но лицата на всички ученици са зачервени. Вълнуват се. Доц. Кирил Дочев е делови, но не може да се каже, че е спокоен. Той съобщава резултатите от подборния кръг за единадесетата международна олимпиада по математика.

На първо място се е класирал с 33 от 40 възможни точки Олег Мушкаров от Благоевград.

Първият състезател в българския отбор за Международната олимпиада е определен. Защитили са правото си на участие още Владимир Тодоров от Велико Търново, Христо Лесов от Казанлък, Георги Попов, Степан Терзиян и Виржиния Христова от Русе, Донка Пашкулева от Чирпан и Веско Спасов от Плевен. Това е осморката на България.

Ръкопляскания, радостни възгласи, въздишки. А на следващия ден в Математическия факултет на Софийския университет започва сериозна работа. Ръководителите са доц. Кирил Дочев, Милко Петков, Владимир Чуканов, Веселин Петков, Михаил Гаврилов, Иван Димовски, Иван Ганчев, Владимир Георгиев и Атанас Гушев.

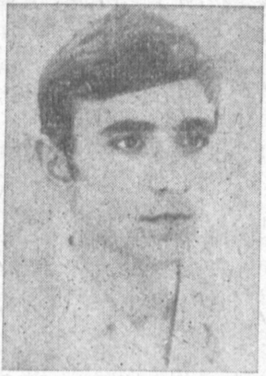
„Доц. Кирил Дочев ни даде много идеи. От него се научих да търся красотата в математическите разсъждения" — казва Степан Терзиян.

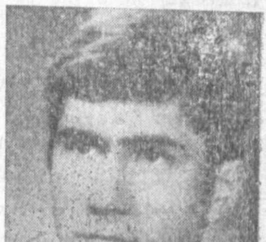
Лекции, упражнения, колективни и индивидуални занимания, разгорещени спорове, размисли, труд — вдъхновен, творчески, тежък. Но в стремежа „да се погълне" повече дните се изнизват незабелязано. А те са само двадесет.

Влакът ги носи към Русе, а оттам към Букурещ.

От Русе са трима — Георги, Виржиния и Степан. Оттук са тръгнали те по нелекия път към върховете на познанието. Тук са първите им учители. Тук за първи път са вкусили от сладостта на успеха, получили са първите отличия. Степан и Виржиния са десетокласници, но в отбора не се чувстват по-малки от останалите. В олимпиадите Виржиния участвува от пети клас. В седми клас стига до подборния кръг, в който по правило участвуват единадесетокласници. В шестнадесетицата не попада, но набира опит. След още две такива участия — в осми и в девети клас — тя влиза в отбора. В своя актив вече има шест награди за участия в Републиканската олимпиада: часовник, екскурзии до Чехо-

Христо Лесов —
Казанлък
Олег Мушкаров —
Благоевград
Виржиния Христова —
Русе
Владимир Тодоров —
Велико Търново
Георги Попов — Русе
Степан Терзиян —
Русе
Донка Пашкулева —
Чирпан
Веско Спасов —
Плевен





словакия, Югославия, Съветския съюз и Франция, две първи награди от математическия радиоконкурс, една трета награда и диплом за принос в ТНТМ. Има добър състезателен опит. Така е и с другите. Времето, изминало от първото участие в математическо състезание, не е много — две-три години, но трудът е много. Работата в клас е само канавата. Заниманията в школата и самостоятелното решаване на задачи са основното. Задачи от сп. „Математика", от Националния радиоконкурс, от конкурса на радио Варна, от олимпиадите, от състезания с школите от други градове...

Всичко, което са работили, е оставило полезна следа, от всичко е взета поука, но от най-голямо значение е работата в школата. Там са постигнали високото ниво на подготовката. Школата подклажда творческия дух, в нея всички се учат. Всеки се учи от другите и сам им помага. Помагат и бившите участници в олимпиадите — Св. Билчев, Д. Т. Дончев, П. Рашков. Те са идеалът на начинаещите. „В школата открих атмосфера, изпълнена с ентусиазъм и търсене, другарство и спортсменска конкуренция — обяснява Степан. — Тук попаднах благодарение на моя приятел Дикранян, а след години аз доведох Огнян Енчев."

В приемствеността, в другарската помощ, в упоритата всекидневна работа се коренят успехите на русенската математическа школа, свързана с името на нейния създател и дългогодишен ръководител Дочо Дочев — сега доцент и ръководител на катедрата по математика във ВИММСС. Всеотдайността, любовта към математиката и трудолюбието са качествата, които така силно привързват младите хора към него.

А не беше и само школата. В Русе беше създаден благоприятен за математиката климат. И в Окръжния комитет на партията, и в Комсомола, и в Окръжния народен съвет мислеха за математиката, подкрепяха всяка добра идея, напътствуваха и насърчаваха.

Влакът трополи по Моста на дружбата, а мисълта на всеки е още далеч назад — там, откъдето го изпратиха другарите и където ще се вълнуват за него през тези дни.

5 юли 1969 година. Букурещ. Вече са пристигнали средношколците от Англия, Белгия, ГДР, Монголия, Полша, СССР, Унгария, Франция, Холандия, Чехословакия, Швеция и Югославия

Олимпиадата се провежда в училище „Н. Балческу". Акад. Мойсил с топли думи посреща гостите и пожелава на всички успешно представяне. Приветствия, цветя, усмивки... Но сърцата са свити и мислите са вече в класните стаи, където след малко ще започне състезанието. Състезание без публика, без насърчителни викове, без ръкопляскания. Тихо, съсредоточено, напрегнато.

Напрегната е била и работата на международното жури при подбиране на задачите.

Какво може да се каже за задачите сега? Дали са били трудни? Дали са изненадали нашите състезатели? „Не! — твърдо отговаря Христо Лесов. За мен, а вероятно и за останалите членове на нашия отбор задачите не бяха изненада. За това говори и резултатът — всеки събра повече от 20 точки от 40 възможни. Аз работих по всички задачи, но успях да реша изчерпателно само три. Сигурно бихме постигнали повече, ако вълнението ни беше по-малко. Ръката ми в началото така трепереше, че не можех да си направя чертежа. И в двата дни най-много точки получих на тези задачи, от които бях започнал да работя. Спомням си, че същото се случи и на подборния кръг. Винаги е по-добре да се започне от задачата, в която има нещо познато и има шансове бързо да се реши. От това човек се успокоява и добива настроение за работа. Минали са десет години, а аз още си спомням решенията на всички задачи. Спомням си даже по няколко варианта, които след състезанието сме обсъждали. Най-много трудности ни създаде втората задача. Тя е наистина по-особена. На петата задача Олег беше дал по-силно неравенство, за което беше предложен за специална награда.“

Двата състезателни дни са минали, но и в общежитието, и в автобуса, с който се разхождат из страната, все още се обсъждат решенията. В тези минути преводачите са излишни. Езикът на математиката е разбираем за всички. Листовете минават от ръка в ръка. Всеки нещо добавя, нещо коригира, нещо оспорва или се възхищава на интересно хрумване. Пътуването е истинско разтоварване след напрегнатите дни. Посещават средношколски лагер и във футболната среща международният математически отбор печели срещу почиващите.

А в Букурещ журито работи. Резултатите са вече известни. Трите първи награди са за участници от СССР, Англия и Унгария. Определени са 20 втори и 21 трети награди. Трети награди имат Хр. Лесов, О. Мушкаров, В. Христова.

На тази олимпиада успехът (в брой точки) на нашия отбор е 20% над средното ниво. След нас се нареждат Югославия, Чехословакия, Монголия, Полша, Франция, Белгия и Холандия.

Олимпиадата е закрита тържествено. Отборът ни се завръща, достойно представил страната си. Но нито един от олимпийците не спря дотук. Всички избраха математиката за своя професия. Мушкаров, Тодоров, Попов, Христова и Пашкулева са в Единния център по математика и механика на БАН, Спасов и Терзиян са асистенти, а Лесов се върна в родния си град като преподавател по математика и ръководител на школата, в която беше израснал.

И всеки помага с каквото може в работата с младите: изнасят лекции, пишат статии, предлагат задачи, ръководят школи. За всеки от тях олимпиадата е била фактор при избора на професия.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА РЕПУБЛИКАНСКИЯ КРЪГ

1. Докажете, че при всяко естествено число n числото

$$N=1+2^{2\cdot 5^n}$$

се дели на 5^{n+1}

2. Докажете, че полиномът

$$f(x)=x^5-x+a,$$

където a е цяло число, което не се дели на 5, не може да се представи като произведение на два полинома с цели коефициенти от по-ниска степен.

3. Дадени са 20 различни естествени числа, по-малки от 70. Докажете, че измежду техните разлики има поне 4 еднакви.

4. Даден е остроъгълен триъгълник със страни a, b, c. Нека с p, r и R са означени съответно полупериметърът му, радиусът на вписаната и радиусът на описаната окръжност. Пресечната точка на медианите разполовява отсечката, съединяваща центровете на вписаната и описаната окръжности.

Докажете, че е изпълнено равенството

$$7(a^2+b^2+c^2)=12p^2+9R(R-6r).$$

5. В триъгълна пирамида $OABC$ околните ръбове OA, OB и OC са два по два перпендикулярни.

а) През центъра на кълбото, описано около тази пирамида, е прекарана равнина, успоредна на стената ABC, която пресича ръбовете OA, OB и OC съответно в точки A_1, B_1, C_1. Намерете отношението на обемите на пирамидите $OABC$ и $OA_1B_1C_1$.

б) Докажете, че ако стените OBC, OAC и OAB сключват със стената ABC съответно ъгли α, β и γ, то

$$\frac{h-r}{r}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma,$$

където h е разстоянието от върха O до стената ABC, а r — радиусът на вписаното в пирамидата $OABC$ кълбо.

6. Докажете тъждеството

$$1+\frac{\cos x}{\cos^1 x}+\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\ldots+\frac{\cos nx}{\cos^n x}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x},$$

при условие че $\cos x\neq 0$ и $\sin x\neq 0$.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА ПОДБОРНИЯ КРЪГ

7. Ако сумата на трите числа x^5, y^5 и z^5, където x, y и z са цели числа, се дели на 25, то сумата на някои две от тях също се дели на 25.

8. Докажете, че

$$S_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

за всяко n.

9. Част от точките на равнината са наречени „бели“, а останалата част — „черни“ (така че всяка точка е или бяла, или черна). Докажете, че каквото и да бъде положителното число r:

а) има поне две точки от различен цвят, които са на разстояние r;

б) има поне две точки от еднакъв цвят, които са на разстояние r;

в) ще останат ли верни горните твърдения, ако в условието на задачата равнината се замени с права?

10. Намерете страните на триъгълник, ако е известно, че вписаната в него окръжност пресича една от медианите му в две точки, които я разделят на три равни отсечки; а лицето на триъгълника е $6\sqrt{14}$ cm².

11. Докажете тъждеството:

$$\prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{4^m}.$$

12. Дадено е, че $r=[3(\sqrt{6}-1)-4(\sqrt{3}+1)+5\sqrt{2}]\,R$,

където r и R са радиусите на вписаната и описаната сфера в правилна n-ъгълна пирамида. Нека е известно, че центровете на двете сфери съвпадат:

а) намерете n;

б) ако $n=3$ и дължините на всички ръбове са a, намерете обемите на частите на пирамидата, които се получават при прекарване на равнина μ. Равнината μ пресича два от ръбовете, минаващи през върха A, съответно в точките E и F така, че $|AE|=p$ и $|AF|=q$ $(p<a;\ q<a)$; μ пресича продължението на третия ръб зад срещуположната на върха A стена в точка G, тъй че $|AG|=t$ $(t>a)$.

ЗАДАЧИ, ДАДЕНИ НА МЕЖДУНАРОДНАТА ОЛИМПИАДА

13. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа a със следното свойство: при всяко естествено n числото $z=n^4+a$ не е просто число.

ГДР, 5 точки

14. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са реални константи, x — реална променлива и $f(x)$

$=\frac{\cos(a_1+x)}{1}+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\ldots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}$. Докажете, че от $f(x_1)=f(x_2)$

Унгария, 7 точки.

$=0$ следва, че $x_1-x_2=m\pi$, където m е цяло число.

15. За всяко $k=1, 2, 3, 4, 5$ намерете необходимите и достатъчни условия, които трябва да удовлетворява числото $a>0$, за да съществува тетраедър, k от ръбовете на който имат дължина a, а останалите $6-k$ ръба имат дължина 1.

Полша, 7 точки.

16. Полуокръжността γ е построена над диаметъра AB. Точката C лежи на γ и е отлична от A и B. Ортогоналната проекция на C върху AB означаваме с D. Разглеждаме три окръжности γ_1, γ_2 и γ_3, имащи обща допирателна AB. От тях γ_1 е вписана в $\triangle ABC$, а γ_2 и γ_3 се допират (и двете) до отсечките CD, AB и до γ. Докажете, че γ_1, γ_2 и γ_3 имат втора допирателна. *Холандия, 6 точки.*

17. В равнината са дадени n точки $(n>4)$, като при това никои три не лежат на една права. Докажете, че има поне C_{n-3}^2 изпъкнали четириъгълника с върхове измежду дадените точки.

Монголия, 7 точки.

18. Докажете, че ако $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$ и $x_2y_2-z_2^2>0$, то

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Установете необходимите и достатъчни условия, при които даденото неравенство се превръща в равенство.

СССР, 8 точки.