Академик Благовест Сендов и българският принос в Теорията на апроксимациите

Андрей Андреев

Теорията на апроксимациите като част от Математическия анализ има над 150 годишна история. Да споменем само основополагащите резултати на Карл Вайерщрас от 1885 г. и на Пафнутий Чебишов от 1854 г. По-точно, Вайерщрас доказва, че всяка непрекъсната функция в интервала $[a, b]$ може да бъде приближена с алгебричен полином в равномерната метрика с произволна точност, а теоремата на Чебишов за алтернанса харектеризира напълно полинома на най-добро равномерно приближение. В теоретичен аспект това са красиви математически резултати, но за значението им за практиката може да се съди дори само по факта, че компютрите бързо пресмятат стойностите на полиномите, което ги прави удобен изчислителен инструмент.

Българската математика не остана встрани от бурното развитие на Теорията на апроксимациите в първата половина на миналия век и в лицето на академиците Никола Обрешков и Любомир Чакалов оставя забележими следи. Като студент по математика през 50-те години на миналия век Благовест Сендов изпитва директно влиянието им, както и това на други изявени личности в българската математика като академик Любомир Илиев и чл.-кор. Ярослав Тагамлицки. Първата научна статия на Бл. Сендов "On a class of regular-monotone functions", Dokl. AN SSSR, **110**, № 1 (1956), 27–30, е представена от световноизвестния в теорията на апроксимациите математик, академик С. Н. Бернщайн. Съществено влияние върху бъдещите изследвания на Сендов оказва специализацията му през 1960–1961 по Изчислителна математика в Московския държавен университет. Изключителното влияние на идеите на Колмогоров, дейността на семинарите на С. М. Николски, С. Б. Стечкин, Д. Е. Меншов и др. поставят нови проблеми в теорията на апроксимациите. Бл. Сендов е потопен в една среда, събрала немалка част от цвета на математическата мисъл. Работейки върху проблем, поставен му от Колмогоров за ентропията в класа на непрекъснатите функции, той стига до извода, че хаусдорфовото разстояние е естествена метрика в пространството на ограничените функции. Това разстояие е въведено от Felix Hausdorff в книгата му "Grundzüge der Mengenlehre", издадена през 1914 г. и измерва близостта на две подмножества на дадено метрично пространство. По-точно, ако X и Y са две непразни подмножества на метричното пространство M с метрика d, то Хаусдорфовото разстояние $r(X, Y)$ между множествата X и Y се дефинира с

$$r(X, Y) = \inf_{\epsilon>0}\{X \subseteq Y_\epsilon, Y \subseteq X_\epsilon\},$$

където

$$X_\epsilon = \bigcup_{x\in X}\{z \in M; d(z, x) \leq \epsilon\}.$$

С използването на хаусдорфовото разстояние се поставят основите на самостоятелен клон в теорията на апроксимациите. Първият основен и красив резултат, получен от Бл. Сендов през 1964 в докторската му дисертация е, че в интервала $[-1, 1]$ функциите

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

(а и всяка ограничена функция) могат да бъдат приближени в Хаусдорфова метрика с алгебричен полином от степен n с точност $\text{const.}\dfrac{\log n}{n}$. Той доказва, че тази оценка не може да бъде подобрена. За силата на тези резултати говори поканата към Бл. Сендов да ги представи в руското списание „Успехи Математических Наук“ през 1969 г.

През 1973 г. в Journal of Approximation Theory, 9 (1973), Бл. Сендов заедно с Васил Попов доказва следната теорема:

Съществува абсолютна константа C такава, че за всяка ограничена функция f в интервала $[a, b]$ и всяко $\alpha > 0$, най-доброто хаусдорфово приближение $r_n([a, b], \alpha; f)$ на f с полиноми от степен n в интервала $[a, b]$ с параметър α удовлетворява неравенството

$$r_n([a, b], \alpha; f) \leq C\omega(f; n^{-1})\frac{\ln(e + \alpha.n.\omega(f; n^{-1}))}{1 + \alpha.n.\omega(f; n^{-1})}.$$

При $\alpha \to 0$ горната оценка е обобщение на знаменитата теорема на Джексън от 1911 г. за скоростта на приближение на непрекъснати функции с полиноми.

Базов източник на информация за приближенията на функции в хаусдорфова метрика е монографията на Бл. Сендов "Hausdorff approximations", Kluver Acad. Publ., 1990.

В резултат на изследванията върху хаусдорфовите приближения Бл. Сендов и учениците му въвеждат нова характеристика на функциите, така наречения τ-модул:

$$\tau_k(f;\delta) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b (\omega_k(f,x;\delta))^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

където

$$\omega_k(f,x;\delta) = \sup \left\{ |\Delta_h^k f(t)| : t, t+kh \in [x - \frac{k\delta}{2}, x + \frac{k\delta}{2}] \cap [a,b] \right\}.$$

Този модул позволи редица оценки на грешката в числените методи за решаване на диференциални уравнения, в квадратурните формули и в сплайн-интерполациите да бъдат получени при значително по-слаби изисквания за гладкост на участващите функции. Модулът намери естествено приложение и при оценката на скоростта на сходимост на линейните положителни оператори, използващи дискретни стойности. Само да споменем, че класическият оператор на Бернщайн, намиращ редица приложения в теоретичен и практически аспект, особено компютърните му приложения в графиката,

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

също попада в тази група от оператори. Резултатите, свързани с τ-модулите са изложени в монографията „Усреднени модули на гладкост", БАН, 1983 г., написана съвместно с В. Попов и издадена 5 години по-късно от издателствата „МИР", Москва и John Wiley&Sons, New York.

Удивителна е интуицията на Бл. Сендов в две направления:

- първо направление – да предлага нови клонове в теорията на апроксимациите, които се оказват привлекателни за редица математици;

- второ направление – да подлага на съмнение резултати, които на пръв поглед са неподобряеми.

Към първата група, освен хаусдорфовите приближения, спадат и въведените през 1971 г. от него „Параметрични приближения". Бл. Сендов доказва, че параметричното приближение на фукцията $|x|$ на интервала $[-1,1]$ е $(3+2\sqrt{2})^{-n}$. Знаменитият резултат на американския математик Donald J. Newman от 1979 г. за рационалното приближение на $|x|$ дава значително по-слаб порядък – $e^{-c\sqrt{n}}$. И двата подхода използват при приближението два полинома от степен n.

Типичен представител на втората група научни резултати са тези получени в резултат на изследванията на Бл. Сендов върху константата на Whitney. През 1957 г. Whitney доказва, че за всяко цяло $n > 0$ съществува константа W_n такава, че за всяка ограничена функция $f : [a, b] \to R$ съществува полином P_{n-1} от степен $n-1$, за който

$$\|f - P_{n-1}(f)\| \leq W_n.\omega_n\left(f; \frac{b-a}{n}\right),$$

където $\omega_n(f; \delta)$ е n-тия модул на непрекъснатост на функцията f. Първоначалната оценка за W_n е от порядъка n^n и в математическите среди се считаше, че порядъкът не е по-малък от C^n. Бл. Сендов изказва хипотезата, че $W_n = 1$. За историята и борбата с константата на Whitney нека погледнем как и от кого е подобрявана оценката и да оставим без коментар долната таблица.

year	**name**	$W_n \leq$
1964	Brudnyi	$C.n^{2n}$
1985	Ivanov–Takev	$C.n.\ln n$
1985	Binev	$C.n$
1985	Sendov	C
1986	Sendov	6
1989	Kryakin	3
1995	Kryakin	2

През 1959 г. Бл. Сендов, като асистент на академик Н. Обрешков, изказва пред него една хипотеза, която става известна през следващите 50 години като „Хипотезата на Сендов“. Тази хипотеза изследва взаимното разположение на корените на алгебричен полином и корените на производната му. Хипотезата гласи, че за полинома

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2)\dots(z - r_n),$$

чиито корени $r_1, \dots, r_n$ са в единичния кръг $|z| \leq 1$, всеки от n-те корена на P е на разстояние не повече от 1 от някой корен на производната на полинома. От класическата теорема на Gauss-Lucas, която е естествено обобщение на добре известната теорема на Rolle от 1691 г., следва, че всички корени на P' са в единичния кръг, но хипотезата на Сендов очевидно прецизира разположението на корените на полинома и производната му. За интереса към хипотезата говори фактът, че досега са публикувани над 100 статии по този въпрос, включително и от редица български математици. Въпреки, че хипотезата е „почти“ доказана, този математически проблем, който изпъква с простата си формулировка, заради която може би е и така привлекателен, остава недоказан.

За интереса на Бл. Сендов да бъде в крак със съвременните тенденции в математиката, в частност теорията на апроксимациите и компютърните ѝ приложенията, говорят изследванията му в последните години в областта на мултирезолюционния анализ, компресията на данни и обработката на образи.

Със своя ентусиазъм, нови идеи, интуиция и висок професионализъм Бл. Сендов определено създаде българска школа в теорията на апроксимациите, която се радва на международно признание. Доказателствата за това твърдение могат да се намерят в:

- организирането в България на 9 международни конференции по теория на апроксимациите в периода 1970–2011 г. В тях са участвали почти всички водещи математици в областта от Европа, Азия и Америка;

- Бл. Сендов подготви десетки математици, които са били или в момента са лидери в областта си както у нас, така и в редица университети в Европа и Америка. Негови докторанти са били:
  Васил Попов, Васил Веселинов, Тодор Боянов, Борислав Боянов, Светослав Марков,Спас Ташев, Георги Илиев, Панайот Василевски, Таня Костова, Христо Джиджев, Милко Такев;
- през 1995 г. в САЩ се учредява награда на името на Васил Попов, първият и може би най-талантливият ученик на Бл. Сендов, която се дава на всеки 3 години на млади учени в областта на апроксимациите. Тя е била присъждана на Albert Cohen (Париж), Arno Kuijlaars (Холандия), Emmanuel Candes (Станфорд), Serguei Denissov (Уисконсин-Медисон) и Mauro Maggioni (Дюк). На 13-тата Международна конференция по теория на апроксимациите, Сан Антонио, Тексас, март 7–10, 2010, наградата е присъдена на Joel Tropp от Калифорнийския технологичен институт.