Година LVII 1964 год.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Математически факултет

МАТЕМАТИКА И ИЗЧИСЛИТЕЛНА ТЕХНИКА

(Встъпителна лекция, четена на 13. 5. 1963 г.)

Благовест Сендов

Когато днес се говори за изчислителна математика, обикновено мнозина остават с впечатлението, че става дума за някакъв нов дял от математиката, някаква модерна математическа дисциплина, появила се едва ли не в последните десетилетия. Това погрешно впечатление се създава от редица обстоятелства, които дават основание изчислителната математика да бъде наричана понякога модна дисциплина с всичките нюанси в смисъла на прилагателното „моден“, различаващи го от „модерен“.

В същност историята показва [1], че в най-дълбока древност математиката се е свеждала предимно до изчисления и съставяне на таблици. Така например основната дейност на учените в древния Вавилон е било създаването на математически таблици. Древните египтяни са били също дейни изчислители. Те са съставили например таблици за представяне на сложни дроби във вид на сума от дроби с числител единица. Математиците от Ренесанса са се занимавали също така с множество задачи, свързани с изчисления.

Всичко това показва, че изчислителната математика не само не е ново явление, а може с право да се смята като едно от най-старите направления в математическата наука.

Едно по-подробно запознаване с историята на математиката показва, че изчислителният характер на математиката до голяма степен е доминирал до създаването на понятието граница и широкото навлизане на това понятие в анализа. Един велик представител на изчислителната математика е гениалният немски математик Карл Фридрих Гаус (1777—1855), който е притежавал виртуозна изчислителна техника и е проявявал голяма упоритост при смятането с числа.

Със създаването на новите мощни методи на анализа интересите на математиците се насочват съвсем оправдано към решаването на множество важни и интересни задачи с помощта на новите методи, в които основна роля играе понятието граница. Постепенно голямата част от математиците, а може би и добрата част от математиците скъсва с проблемите за намиране на решенията на задачите в числен вид. За добър тон в математическите работи вече се смята отсъствието на всякакви пресмятания с числа, записани в десетична позиционна система. Многоцифрените числа се използуват в математическите работи вече само за номерация на формулите и страниците.

Корнелиус Ланцош — един от видните днес специалисти в областта на изчислителната математика, счита това явление за историческо недоразумение. В предговора към своята книга Приложен анализ [2] той казва, че дълги години се е занимавал с изследвания в тези области на анализа, които интересуват на първо място инженерните дисциплини и физиката, и продължава: „Обстоятелството, че тази област на „работната математика“ не е предизвиквала през XIX век такъв интерес, както класическите раздели на анализа, се явява плод на историческо недоразумение. Включително до епохата на Гаус и Льожандър „работните“ методи на анализа привличаха върху себе си вниманието на най-добрите математици. Но блестящото откритие на теорията на границите измени положението. Оттогава насам се счита за достатъчно да се намери един безкраен процес на приближаване, с помощта на който може да се установи верността на определени аналитически резултати независимо от това изпълним ли е приложеният процес за дадената задача или не. В резултат на това се е получило постепенното разделяне на „чиста“ и „приложна“ математика, така че ние сега имаме „чисти аналитици“, които развиват своите идеи в света на теоретическите построения, и „числени аналитици“, които привеждат аналитическите процеси в машинни операции.“

За „чистите аналитици“, както ги нарича Корнелиус Ланцош, са особено характерни чистите теореми за съществуване на решение на дадена задача без указания за някакъв метод за намиране на това сигурно съществуващо решение.

Отчуждаването от конкретното число не трябва да се счита за някаква погрешна стъпка в развитието на математиката. Напротив, естественият стремеж на математиците към обобщения довежда до формулирането и решаването на задачите във все по-обща и по-обща форма.

Големите постижения на математиката, които се дължат до голяма степен на този стремеж към все по-голяма общност, в повечето случаи все пак не могат да бъдат използувани от другите науки, които си служат с математически модели на изследваните от тях природни явления, ако решението на всяка математическа задача, поставена в модела, не може да се доведе до пресмятането на конкретни числа. Така възниква необходимостта от създаване на специални методи за ефективно решаване на определени математически задачи, при които обикновено целта е да се изрази или по-точно да се характеризира решението чрез краен брой рационални числа. Тези методи, които са получили названието числени методи, дават възможност да се намерят чрез краен брой аритметични действия краен брой числа, които характеризират търсеното решение на дадената математическа задача.

Така например методът на простата итерация [3] за решаване на системи линейни алгебрични уравнения с доминиращ диагонал

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,$$

$$(1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,$$

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| +\cdots+ |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| +\cdots+ |a_{in}|$$

ни дава възможност чрез краен брой операции (събиране, изваждане, умножение и деление) при дадени a_{ij}, $i, j=1, 2, \ldots, n$ и b_i, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, да намерим $n+1$ числа

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \text{ и } \varepsilon,$$

които характеризират решението на системата (1) по следния начин: ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е решението на (1), то

$$\xi_i-\varepsilon < x_i < \xi_i+\varepsilon, \quad i=1, 2, 3, \ldots, n.$$

Намирането или характеризирането на решението на една математическа задача чрез краен брой рационални числа може да стане с помощта на най-различни средства: таблици, математически инструменти, математически машини и др. Съвкупността от численните методи и изчислителните средства се нарича изчислителна техника. Използуването на термина изчислителна техника в този широк смисъл на думата представлява известно удобство, тъй като понякога е трудно да се постави рязка граница между численните методи и изчислителните средства. Това важи особено за съвременните изчислителни средства с автоматично управление.

Численните методи от своя страна са съставна част на изчислителната математика, за която стана дума няколко пъти досега. Естествено е тук да се опитаме да дадем отговор на въпроса: що е изчислителна математика? Както и на много други аналогични въпроси, като например: що е геометрия? [4], така и на този въпрос не може да се даде кратък и изчерпателен отговор. Ние ще се опитаме обаче да характеризираме до известна степен това понятие.

Изчислителната математика не е такава математическа дисциплина, каквато е например евклидовата геометрия или теорията на групите. Тя няма тази характерна структура на математическите дисциплини, които се изграждат въз основа на краен брой основни понятия и аксиоми и имат самостоятелни методи и цели. Изчислителната математика и по-специално численните методи се създават не като елементи на една самостоятелна математическа дисциплина, които имат тясна връзка помежду си, а като един необходим инструмент при използуването на постиженията на другите математически дисциплини (алгебра, анализ, геометрия и др.) в различните математически модели. Ето защо ние различаваме числени методи на линейната алгебра, числени методи на обикновените диференциални уравнения, числени методи на конформното изображение и др.

Ето как известният немски математик Лотар Колац (в статията си, озаглавена „Теоретични основи на изчислителната математика" [5]) изброява типичните за изчислителната математика задачи, формулирани на езика на функционалния анализ:

I. Решаване на уравнения от вида

$$Tu = 0 \text{ или } Tu = u, \tag{2}$$

където T е даден оператор, линеен или нелинеен, а u е неизвестният елемент.

II. Изследване свойствата на решенията на уравненията (2), а именно:

а) намиране стойността на някакъв функционал $G(u)$, където u е решението;

б) асимптотичните свойства на решението;

в) проблеми за стабилност.

III. Екстремални въпроси със и без допълнителни условия. При дадени оператори T и S и функционал G търси се u, за което

$$G(u) = \text{extremum},$$

$$T(u) \geqq 0,$$

$$S(u) = 0.$$

IV. Въпроси за представимост. Нека u и φ_ν са дадени елементи на едно линейно пространство R и F е съвкупността от елементите f, които имат вида $f = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \varphi_\nu$, където a_ν са константи, а p може да бъде и ∞. Разглеждат се задачите:

а) ако u принадлежи на F, да се пресметнат за него стойностите a_ν;

б) ако u не принадлежи на F, да се пресметнат a_ν по такъв начин, че разстоянието $\rho(u, f)$ да бъде възможно най-малко;

с) съответните нелинейни задачи.

V. Оценки, числено пресмятане на интеграли, редове и др. Преработка на данни и много задачи от математическата статистика.

Както се вижда, изчислителната математика има много общи черти с така наричаната приложна математика, защото всяко приложение на математиката е свързано така или иначе с използуване на числени методи. Възприемането на термина изчислителна математика поставя по този начин и въпроса за необходимостта от термина приложна математика, който през XIX и началото на XX век доби доста широко разпространение. Терминът „приложна математика" има и това неудобство, че създава впечатлението, че математиката се дели на такава, която се прилага, и такава, която не се прилага. Но такова едно деление, даже и в случая, когато се ограничим само с приложения в тесния смисъл на думата, без да вземаме пред вид приложенията на математиката в самата математика, е съвсем изкуствено и условно. Така например въпросите за решаване на обикновени диференциални уравнения, при които се търси изразяването на решението чрез квадратури, се смятаха до неотдавна за изцяло приложни въпроси, но днес те не представляват вече такъв интерес за приложенията, защото числените методи за решаване на обикновените диференциални уравнения с използуване на съвременни изчислителни средства ни дават решенията бързо и в удобен за приложенията вид. От друга страна, множество математически дисциплини, като например математическата логика, теорията на групите и др., за които доскоро се смяташе, че са далеч от приложенията, сега играят важна роля в най-различни приложни задачи. Затова неправилно и по същество невъзможно е да се дели математиката на приложна и неприложна. Разбира се, без да има нужда самата математика като наука да се дели на приложна и неприложна, може спокойно да има отделни лица, групи от хора, институти и др., които да се занимават с приложенията на математиката.

Видяхме, че в известен смисъл изчислителната математика играе обслужваща роля във връзка с приложенията. От друга страна обаче, изчислителната математика сама поражда редица въпроси, които представляват интерес за математиката въобще. Като един такъв пример ще споменем въпроса за табулирането на функциите и методите за оценка на грешките при приближени пресмятания, които доведоха до въвеждането на понятията ε-ентропия и ε-капацитет [6, 7] на един компакт. Тези понятия бяха използувани от А. Г. Витушкин [8] при оценка на сложността на задачата за табулиране на функции. Но същите понятия дадоха възможност на А. Н. Колмогоров и неговия ученик В. И. Арнольд да решат знаменитата тринадесета проблема на Хилберт [9].

Друга задача, която възниква в изчислителната математика и която по своята трудност представлява голям теоретичен интерес, е следната: нека ни е дадена една функция $f(x)$, дефинирана в интервала $[a, b]$. Да се намери такъв алгоритъм за пресмятане на стойностите на $f(x)$ с отнапред зададена точност за всяко рационално x, принадлежащо на $[a, b]$, който в известен смисъл е минимален. Например, ако допустими действия при пресмятането на стойността на $f(x)$ са четирите аритметични действия, да се намери такъв алгоритъм, при който се използуват минимален брой аритметични действия. Сега обикновено за тази цел се използува алгебричен полином, който апроксимира равномерно функцията със зададената точност. Не е известно обаче дали този алгоритъм не може да се подобри.

Стъпка към изучаването на поставения по-горе въпрос е направена с въвеждането от А. Н. Колмогоров на понятието алгоритмическа сложност на една функция, при което се използува един специален вид крайни автомати. Получени са вече първите резултати в оценка на алгоритмическата сложност на някои конкретни функции [10, 11].

Като характерна черта на изчислителната математика трябва да се спомене още и това, че тя изменя своя облик във връзка с използуваните изчислителни средства. Така например след създаването на сметачните машини с програмно управление новите числени методи винаги се съобразяват с удобствата при използуването им при смятане с такива машини. Вече се говори за числени методи за електронни сметачни машини. Създаването на нови числени методи, предназначени специално за сметачни машини с програмно управление [12], се налага поради обстоятелството, че някои числени методи са по-удобни за реализиране на машини, а други за смятане без машини.

Известни модификации в числените методи се налагат и във връзка с постоянното изменение на сметачните машини, което е плод на тяхното бързо усъвършенствуване. Колко бързо растат изчислителните възможности на електронните сметачни машини, се вижда например от следната таблица, която показва за колко време е било пресметнато числото π с определен брой знаци през последните години [13].

Година	Брой на десетичните знаци	Време за пресмятане
1949	2 037	70 часа
1954	3 089	13 минути
1958	10 000	100 минути
1959	16 167	4 часа и 20 минути
1961	100 000	8 часа и 43 минути

Разбира се, посочените в горната таблица резултати представляват само спортен интерес, но те демонстрират голямата изчислителна мощ на машините.

Използуването на сметачните машини с програмно управление за решаване на различни математически задачи е свързано с така нареченото програмиране на тези задачи. Всяка автоматична сметачна машина може да извършва определен брой различни елементарни операции. Извършването на всяка такава елементарна операция се диктува от съответен код, наречен код на операцията. Числата, с които машината оперира, се записват в отделни клетки на нейната памет. Всяка клетка на паметта има свой номер, наречен адрес на клетката. Съставянето на програмата за работа на една машина се състои в последователното написване по определен за всяка конкретна машина начин на кодовете на съответните елементарни операции, които трябва да бъдат извършени, и съответно адресите на числата, с които тези операции трябва да се извършат. Така се получава работната програма на машината, записана във вид на една последователност от машинни команди, или, както се казва още, на машинен език. При създаването на сложни програми за решаването на обемисти задачи изразходваният човешки труд е твърде голям. При усъвършенствуването на машините се създават все по-удобни начини за писане на програмите с цел да се съкрати и улесни работата по програмирането. Но голямо значение за облекчаване и ускоряване на програмирането играе не само усъвършенствуването на машините, а и едно предварително „обучение" на тези машини, което става за сметка на ангажиране на част от тяхната памет.

Търсят се различни начини за предоставяне на работата по съставяне на програмите за сметачните машини на същите тези машини или, както се казва още, начини за автоматизация на програмирането. Досега са предложени и осъществени различни системи за автоматизация на програмирането, които имат една или друга ефективност, но за най-перспективни се смятат днес тези системи за автоматизация на програмирането, които се основават на тъй-наречените формални езици. Създават се специални езици с напълно формализиран синтаксис и семантика, с помощта на които лесно да се описват числените методи, и то във форма, близка до обикновено използувания математически език. Според Хари Кантрел един формален език, използуван за автоматизация на програмирането, трябва да удовлетворява следните изисквания [14] : 1. Да бъде лек за усвояване от обслужващия машината персонал. 2. Възможност за използуване в различни типове електронни сметачни машини. 3. Да има типови символи и да позволява висока скорост за програмиране. 4. Да допуща описването на широка класа от програми. Кантрел отбелязва също така, че създаването на един формален език за програмиране изисква съвместна работа на създателя на езика и конструктора на машината и тази работа може да продължи 2—3 години до окончателното пущане на езика в експлоатация.

След като един такъв формален език е създаден, написването на програмите се свежда до описване на съответния числен метод с помощта на изработения формален език. Една специална програма, наречена транслатор, осъществява разшифроването на програмата, написана на формалния език, и изготвянето на работната програма, състояща се от машинни команди.

Досега са създадени няколко десетки такива езици за различни машини със съответни транслатори и използуването им в практиката при програмиране е показало, че те са значително ефективни. Работата по програмирането се скъсява и облекчава значително при използуване на този начин за автоматизация на програмирането. Освен това от програмистите вече не се иска ни най-малко да познават машинния език, а само съответния формален език. Това създава възможност при типови задачи машините да се експлоатират от неспециалисти. Обаче създаването на един формален език и съответен транслатор е твърде трудоемка работа. Така например за създаването на формалния език FACT и съответния транслатор са били изразходвани 60 човеко-години [15].

Лесно е да се съобрази, че би било много удобно да има един всеобщ формален език, на който да се пишат числените методи, а всяка конкретна машина да притежава транслатор за писане на работни програми въз основа на програми, записани на този език. С такава цел е създаден езикът АЛГОЛ [16, 17], който бе публикуван за пръв път през 1958 г., а след това на два пъти усъвършенствуван — в 1960 и 1963 год. Този език бързо доби широка популярност и на много места започна работа по създаването на транслатори за конкретни машини на основата на този език. В езика АЛГОЛ се използуват всички главни и прости букви от английската азбука, цифрите от 0 до 9, знаците за аритметическите операции: $+$, $-$, $\times$, $/$, $\div$, $\uparrow$, знаците за отношения: $<$, $\leqq$, $=$, $\geqq$, $>$, $\neq$, знаците за логически операции: $\equiv$, $\supset$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, скоби: (,), [,] и 24 думи от английския език, разглеждани като самостоятелни символи, като например: **go, to, if, then, do, step** и др., които имат същата семантика, както и в английския език.

Една програма за съставяне на таблица от значения на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-0{,}4\,|x-0{,}56|}{0{,}3+x^4}$$

за стойности на x от 0,00 до 1,00 със стъпка 0,01, записана на АЛГОЛ, ще изглежда така:

$$\textbf{for}\ x:=0{,}01\ \textbf{step}\ 0{,}01\ \textbf{until}\ 1\ \textbf{do}$$

$$\textbf{begin}\ \textbf{if}\ x \leqq 0{,}56\ \textbf{then}\ f:=(2\times x\uparrow 3+0{,}4\times(x-0{,}56))\ (0{,}3+x\uparrow 4)$$

$$\textbf{else}\ f:=(2\times x\uparrow 3-0{,}04\times(x-0{,}56)/(0{,}3+x\uparrow 4)$$

and

Усъвършенствуването на методите за автоматизация на програмирането ще създадат възможност за съвършено просто използуване на електронните сметачни машини за решаване на широка класа от математически и икономически задачи, без да е необходима специална квалификация на хората, които експлоатират тези машини. Работата на специалистите програмисти ще се състои в изработването на системи за автоматизация на програмирането.

Важен показател на електронна сметачна машина е нейното бързодействие, т. е. средният брой елементарни операции, които извършва тя за единица време. Повишаването на бързодействието на една електронна сметачна машина може да се постигне чрез използуването на по-бързодействуващи физически елементи. Но важен фактор за повишаване на бързодействието на машините е и усъвършенствуването на тяхната логическа структура. В последно време се обръща особено внимание на тази възможност за увеличаване на бързодействието. Строят се машини с паралелно работещи блокове и се изказват идеи за създаване на групи от паралелно работещи машини, които да решават съвместно една задача, като във всеки момент могат да си обменят информация. Построяването на такива групи от паралелно работещи машини ще постави проблемата за създаването на нови числени методи, съобразени с възможностите на този нов тип изчислителни средства и тяхното ефективно използуване. Това е една напълно неразработена област от изчислителната математика, която ще стане актуална със създаването на този нов тип изчислителни средства.

Накрая ще отбележим, че със създаването и усъвършенствуването на съвременната изчислителна техника математиката стана една важна производителна сила. Това е свързано със създаването на една голяма армия от професионалисти математици и повишаването на общата математическа култура на цялото човечество.

Многобройните приложения на математиката в практиката не се осъществяват с използуването само на някаква специална част или само на някой дял от математиката, който на пръв поглед ни се струва достоен да се нарече приложна математика. Математиката стана производителна сила като едно единно цяло. Затова колкото е важно за практиката развитието на тези математически дисциплини, които на пръв поглед имат непосредствена връзка с приложенията на математиката в практиката, толкова по-важно е хармоничното развитие на цялата математическа наука въобще. Защото, за да има приложение на математиката, най-важното условие е да има математика.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Ванден, Б. Л. — Пробуждающаяся наука, Москва, 1959.
2. Ланцош, К. — Практические методы прикладного анализа, Москва, 1961.
3. Фаддеев, Д. К., Фаддеева, В. Н. — Вычислительные методы линейной алгебре, Москва, 1960.
4. Петканчин, Б. — Геометрии и връзки между тях, Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак., 38 (1942), кн. 1 (мат. и физ.), 193—216.
5. Collatz, L. — Theoretische Grundlagen der numerischen Mathematik, Jahresber. der Deutshen Math.-Ver., 65 (1962), 72—96.
6. Колмогоров, А. Н. — О некоторых асимптотических характеристиках вполне ограниченных метрических пространств, ДАН СССР, 108, 3 (1956), 385—388.
7. Колмогоров, А. Н., Тихомиров, В. — ε-энтропия и ε-капацитет множеств в функциональных пространствах, УМН, 14 (1959), 3—86.
8. Витушкин, А. Г. — Оценка сложности задачи табулирования, Москва, 1959.
9. Колмогоров, А. Н. — О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН СССР, 108, 2 (1956), 179—182.
10. Офман, Ю. — Об алгоритмической сложности дискретных функций, ДАН СССР 145, 1 (1962), 48—51.
11. Карацуба, А., Офман, Ю. — Умножение многозначных чисел на автоматах, ДАН СССР, 145, 2 (1962), 293—294.
12. Ланс, Дж. Н. — Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, Москва, 1962.

13. Shanks, D., Wrench, J. W. — Calculation of π to 100 000 decimals. Math. of Computation, **16**, 77 (1962), 76—99.
14. Cantrell, H. N. — Where are compiler languages going? Datamation, **8**, 8 (1962), 25—28.
15. d'Agapeyeff, A. — Current developments in commercial automatic programming, Comput. J., **5**, 2 (1962), 107—111.
16. Бекус, Дж. В. и др. — Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ—60, Журн. выч. мат. и мат. физ., I, 2 (1961), 308—342.
17. Backus, J. W. and oth. — Revised report on the algorithmic language ALGOL—60, IFIP, 1962.

Постъпила на 15. VI. 1963 г.