Година XXXVII 1940/41 год. Книга I.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математически факултет

РОЛЯТА НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗЪ ВЪ ПРОБЛЕМИТѢ НА БИОЛОГИЯТА.

(Встжпителна лекция, четена на 10. X. 1940 г.)

Отъ Г. Брадистиловъ.

Почитаемо събрание,

Ако се изхожда отъ обекта къмъ субекта или отъ свѣта къмъ човѣка и отъ най-проститѣ и сжщевременно най-общи явления къмъ най-сложнитѣ и най-специалнитѣ, положителната систематизация поставя математиката като изходна точка на научната иерархия. Отъ този обективенъ възгледъ на положителната философия, абстрактнитѣ науки се нареждатъ въ следния редъ: математика, астрономия, физика, химия, биология, социалогия и наука за морала.

Това е сжщо историческия и естественъ ходъ, който човѣшкиятъ духъ е следвалъ, за да достигне до пълното познание на нѣщата, преди да е могълъ това познание да координира.

Математиката е започнала своето бавно развитие отъ Thales, Pythagore и Archimede чакъ до Newton, d'Alembert, Leibnitz и Lagrange; астрономията отъ Eudoxe, Ptolemée, Hipparque до Kepler, Copernic, Hugyhens и Laplace. Физиката започва много по-късно съ Galilée, Bradley, Roëmer, Watt, Volta, Saveur и др.; химията отъ Lavoisier, Scheele, Priestley, Berthollet, Liebig и още много др.; по-после се появява биологията веднага съ работитѣ на Linnée, Jussieu, Harvey, Haller, Buffon, Lamarck, Gall, Broussais, Blainville и др., които установиха сжщо така положителното понятие на живота, неговитѣ условия и неговитѣ степени. Оставаше да се постави основа на науката за индивидуалния човѣкъ — морала. Това направи Auguste Conte, опирайки се на работитѣ на Aristotel, Hobbes, Bossuet, Montesquieu, Hume, Turgot; на физиократитѣ Condorcet, Voltaire и въ социалогията Maistre, Diderot и др.

Математиката е изходна точка на мировата наука, понеже тя изучава най-проститѣ сжществувания. Наистина тя почива върху най-абстрактното понятие — число, което можемъ да извлѣчемъ отъ наблюдението на предметитѣ и на явленията и което, разбира се, е най-общо и сжщевременно най-просто отъ всички положителни идеи. Ако разгледаме две нѣща, които си приличатъ, и отнесемъ отначало нашето внимание върху всѣко отъ тѣхъ по отдѣлно и после върху двѣтѣ заедно, ние имаме идеята за едното нѣщо и после за двѣтѣ нѣща, т. е. за

едно и за две. Следъ като имаме идеята за едно и за две, последователно дохаждаме до идеята за 3, 4,... и т. н. По такъвъ начинъ получаваме идеята за число.

Прочее, математичното изучаване не предполага предварително познание на никоя друга наука, то не зависи отъ никакво друго по-просто абстрактно изследване, то дохажда директно до реалната областъ. Областьта, която се занимава съ изучаването на числата, се нарича, както е известно, аритметика.

Чрезъ познанието на законитѣ на пространството и на движението, които се изучаватъ съответно въ геометрията и въ механиката, и които закони заедно съ тѣзи на числата съставятъ естественото поле на изследванията, математиката установява положителното понятие на мировото сѫществуване въ неговата най-елементарна степень, това което всички обекти обладаватъ и вънъ отъ което нищо на насъ не може да се манифестира. Това, което не съдържа число, пространство (или форма) и движение, сѫществува само въ човѣшкия разумъ.

Отъ логична гледна точка математиката култивира разсѫжденията и въ най-висша степень дедукцията; наблюдението и е твърде ограничено и индукцията почти не е развита.

Законътъ за обективното класиране на явленията споредъ тѣхната намаляваща общность и сѫщевременно тѣхната растяща сложность поставя астрономията на второ мѣсто. Тя изучава земята отъ най-общо и най-просто гледище, т. е. отъ гледището на геометрията и нейнитѣ механически зависимости съ небесната срѣда. Следъ нея се нареждетъ физиката, химията, биологията, социалогията и науката за морала.

Математизирането на една наука е единъ неизбѣженъ етапъ и едно необходимо условие за нейното развитие, понеже математиката почива върху най-проститѣ понятия и за това резултатитѣ, получени съ помощьта ѝ, сѫ най-прецизни и заслужаватъ най-голѣмо довѣрие. Колкото една наука въ преди малко означения иреархически редъ е по-близка до математиката, толкова е по-лесно нейното математизиране.

Всѣки е съгласенъ върху правото за цитиране на числа въ естественитѣ науки, но щомъ като се касае да се разсѫждава върху тѣзи числа, да се подчинятъ на пресмѣтане, срѣщатъ се мѫчнотии и досаждане. Кои сѫ причинитѣ? Трѣбва да се признае, че тѣзи мѫчнотии не произлизатъ винаги отъ умствена ограниченость или консерватизъмъ. Разсѫждениито не плаши натуралиста, но математическото разсѫждение го шокира, защото натуралистътъ е свикналъ да контролира всѣка своя стѫпка съ опита. Като се разсѫждава, подчиняватъ се експерименталнитѣ резултати на една редица отъ логични операции. Точностьта на крайния резултатъ зависи не само отъ първоначалнитѣ данни, но сѫщо отъ числото и естеството на логичнитѣ операции, извършени между допущанията и заключенията. Съ обикновеното разсѫждение това число не е

никога голѣмо и последователнитѣ етапи оставатъ винаги контролирвани. Напротивъ, съ математическото разсѫждение етапитѣ се преминаватъ твърде бърже и се достига до единъ резултатъ, който може да се яви съвсемъ произволенъ и невѣренъ. Причината е, че като се установява едно уравнение, опростява се задачата, като се пожертвуватъ множество фактори или множество частности, и тѣзи пожертвувания деформиратъ резултатитѣ, които произлизатъ отъ логичния апаратъ. Опростяването създава парадокси. Това е единъ фактъ, който е безполезно да откажемъ и който е общъ за всички експериментални науки. Въ чисто математическитѣ проблеми математикътъ е сигуренъ въ своитѣ допущания, и числото и естеството на операциитѣ го интересуватъ само отъ естетична гледна точка, но въ приложенията е съвсемъ друго. При всѣка наука трѣбва една дълга еволюция, за да се съгласуватъ причинитѣ между разсѫждението и опита. Тази еволюция е измината въ астрономията, механиката и физиката, остава и биологията да направи това.

Математиката е влѣзла въ естественитѣ науки презъ вратата на статистиката, но този стадий отстѫпва на аналитичния стадий, както това е станало въ всички рационални науки. Ролята на статистичната метода е да измете терена и да улесни преминаването отъ статистични промѣнливи въ аналитични промѣнливи. Тази работа е грамадна и важна, но когато тя е изпълнена, думата минава на математическия анализъ, който, въ този стадий за образуването на една рационална наука, е единствено способенъ да се възкачи до причиностьта на явленията и оттамъ да изведе всички логични последствия. Въ този стадий, хипотезитѣ, неточни върху интимното естество на явленията, сѫ често пѫти по-полезни отъ емперичнитѣ закони. Така въ оптиката Ptolémée изучава проблемата за рефракция на свѣтлината. Той дава нѣколко експерименални резултати, които се отнасятъ до преминаването на свѣтлината отъ въздуха въ водата и отъ въздуха въ стъклото. Тѣзи резултати сѫ напълно задоволителни, за да послужатъ да се потвърди закона на Descartes. Съ тѣзи данни единъ модеренъ пресмѣтвачъ би конструиралъ единъ полиномъ, който да ги възпроизвежда съ една идеална точность; той би пресмѣтналъ сѫщо вѣроятнитѣ грѣшки; но тази формула за потвърдяване, взета като база за търсения, би била не само безполезна, но и вредна, и ако Descartes бѣше статистикъ, не би открилъ никога закона за рефракцията. Съ този примѣръ не искаме да намалимъ значението на статистиката, но да и отнемемъ този характеръ да третира всичко, което често ѝ се приписва.

Известна е ролята, която математиката играе въ астрономията, физиката и химията. Нашата задача тукъ ще бѫде да изложимъ доколкото позволява времето приложението на

математиката въ изучванията на биологията и по-специално приложението на ифинитезмалното смѣтане въ борбата за животъ.

Много приложения на математиката се направиха въ изследванията върху физиологичнитѣ въпроси относително сетивата, циркулацията на кръвьта, движението на животнитѣ, които могатъ да се сравнятъ съ изследванията въ оптиката, акустиката, хидродинамиката, механиката на твърдитѣ тѣла и които не създадоха нови методи вънъ отъ областьта на класичната математична физика.

Напротивъ биометрията, посрѣдствомъ чисти процеси, създаде единъ ансамбълъ отъ нови и оригинални изучвания, които спадатъ изобщо въ областьта на теория на вѣрятноститѣ.

Отъ друга страна геометрията се използува въ изследванията върху формата и нарастванията на органичнитѣ вещества, за да се опишатъ самитѣ форми и тѣхното развитие. Методътъ на това изследване е сѫщиятъ, както астрономията, въ своитѣ изучвания, бѣше го направила отъ дълго време.

За да не се отдалечимъ отъ поставената ни цель, ще оставимъ нецитирани много аналогични приложения на математиката. Нека сега се спремъ по-подробно върху нашата задача.

Биологичнитѣ съжителства сѫ съставени отъ много видове, които живѣятъ въ една и сѫща срѣда. Обикновено индивидитѣ на тѣзи съжителства оспорватъ една и сѫща храна, или пъкъ известни видове живѣятъ за смѣтка на останалитѣ, отъ които се хранятъ. Тѣ могатъ сѫщо и взаимно да си помагатъ. Всичко това влиза въ общото явление—борба за животъ.

Числениятъ характеръ на това явления се проявява съ вариациитѣ на бройоветѣ на индивидитѣ. При известни условия тѣзи вариации даватъ колебания около срѣднитѣ стойности, при други тѣ означаватъ изчезването или прогресивното нарастване на известни видове.

При теоритичното изучване на тѣзи вариации въ биологичнитѣ съжителства ще трѣбва да се излѣзе отъ познати факти и правоподобни хипотези, за да може чрезъ математиката да се извлечатъ най-възможни последствия.

При изследването на въпроситѣ отъ борбата за сѫществувание, които представляватъ известни мѫчнотии при ориентирането още въ самото начало, не се използува, както трѣбваше да се очаква, теорията на вѣроятноститѣ, но само инфинитезмалното смѣтане — впрочемъ, най-могѫщото отъ всички математически срѣдства.

Най-напредъ въ една ограничена срѣда, за да характеризираме единъ видъ съ едно число, допущаме хомогенностьта на индивидитѣ отъ този видъ, като пренебрѣгнемъ вариациитѣ на възрастьта или на ръста и неизмѣняемостьта на тѣзи индивиди отъ времето. После, въпрѣки че бройоветѣ на индивидитѣ сѫ прекѫснати функциитѣ, при математическото изучване тѣзи функции се замѣстватъ съ непрекѫснати функции, които допуща

производни и които въ всѣки моментъ иматъ сѫщитѣ цѣли стойности както замѣстенитѣ функции. Касае се да се намѣрятъ тѣзи функции, изпълняващи на условия, които сѫ достатъчни да ги опредѣлятъ и на които цѣлитѣ части отговарятъ на условията, положени отъ опита за функциитѣ, които представляватъ индивидитѣ на видоветѣ, живущи въ едно биологическо съжителство.

Да разгледаме единъ най-простъ случай. Нека имаме единъ животински видъ, който живѣе въ една неизмѣнна срѣда, или още по-добре, който живѣе безъ прѣко или непрѣко влияние заедно съ други видове въ една срѣда, която представлява за вида сѫщитѣ възможности за животъ. Въ този случай, който вече е доста отдалеченъ отъ реалностьта, да пренебрѣгнемъ всѣка периодичность, която може да бѫде възможна за раждаемость или смъртность. Тогава можемъ да си мислимъ, че за единъ кѫсъ интервалъ отъ време съ дадена дължина и за единъ многоброенъ видъ, числото на роденитѣ и на умрѣлитѣ е пропорционално на общия брой на индивидитѣ, които сѫществуватъ въ тази епоха. Следователно нарастването на броя на индивидитѣ за този интервалъ отъ време ще бѫде пропорционаленъ на N. Очевидно е, че това нарастване ще бѫде сѫщо пропорционално и на интервала, ако той е достатъчно малъкъ. При тѣзи предположения и като се допустне, че N е непрекѫсната функция, получаваме зависимостьта

$$dN = \varepsilon N\, dt, \tag{1}$$

гдето ε е коефициентъ на пропорционалностьта и се нарича още коефициентъ на нарастването, понеже представлява отношението на скоростьта на нарастването $\frac{dN}{dt}$ къмъ броя на индивидитѣ N.

Като интегрираме (1), добиваме формулата

$$N = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}. \tag{2}$$

Това е добре познатиятъ законъ за експоненциалнитѣ измѣнения на видоветѣ, т. е., ако времето тече въ аритметична прогресия, броятъ на индивидитѣ отъ вида се измѣня въ геометрична прогресия. Ако $\varepsilon > 0$, видътъ се увеличава; ако $\varepsilon < 0$, той намалява и най-сетне, ако $\varepsilon = 0$, той остава винаги постояненъ, т. е. рожданията компенсиратъ точно умиранията.

Много е лесно да опредѣлимъ практически коефициента на нарастването ε, който характеризира развитието на вида. Наистина, ако протече известенъ интервалъ отъ време T, числото на индивидитѣ се умножава съ $e^{\varepsilon T}$, което е по-голѣмо, по-малко, или равно на 1, споредъ това дали видътъ съответно расте, намалява или остава постояненъ (стационира).

Въ първия случай, ако T е времето, за което е необходимо да се удвои вида, то уравнението (2) ще ни даде

$$2 = e^{\varepsilon T} \text{ или оттукъ } \varepsilon = \frac{0{,}694}{T}.$$

Въ втория и третия случай имаме съответно

$$\varepsilon = -\frac{0{,}694}{T} \text{ и } \varepsilon = 0.$$

Тѣзи интервали отъ време T, които сѫ лесно измѣрими, ще ни дадатъ веднага ε. Оттукъ се вижда, че ε не зависи отъ началния моментъ.

Ако предположимъ сега, че външната срѣда не остава неизмѣнна, а напротивъ се промѣня бавно, то за достатъчно кѫсо време можемъ да си мислимъ, че се намираме при сѫщитѣ условия както въ токущо изложения случай. Но тогава коефициентътъ на нарастването ще се измѣня изобщо съ външнитѣ условия и, ако познаваме закона на това измѣнение, ще имаме уравнението

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon(t)\, N(t), \tag{3}$$

което представлява едно диференциално уравнение, чрезъ интегрирането на което ще получимъ търсената функция N.

Ако разглеждаме сега нѣколко животински вида, които живѣятъ заедно, то естествено е да предположимъ, че тѣхнитѣ коефициенти на нарастването ще зависятъ изобщо отъ численитѣ състояния на различнитѣ видове и сѫщо направо отъ времето, ако външнитѣ влияния, които не могатъ да се пренебрѣгнатъ, промѣнятъ срѣдата. Оттукъ следва, че трѣбва да се направятъ хипотези върху начина, по който коефициентитѣ на нарастването зависятъ отъ функциитѣ N и отъ времето. Така, ако се направятъ такива хипотези, че коефициентитѣ на нарастването f_i сѫ функции само на N_i, то диференциалното уравнение на тѣзи функции ще се представи съ системата

$$\frac{1}{N_i}\frac{dN_i}{dt} = f_i(N_1, \ldots, N_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Обаче отъ гледището на реалностьта трѣбва да се предположи, че коефициентитѣ на нарастването зависятъ за всѣки моментъ не само отъ действителнитѣ стойности на N_i, но сѫщо и отъ миналитѣ стойности до една повече или по-малко отдалечена епоха. Тогава тѣзи коефициенти не трѣбва да бѫдатъ разглеждани само като функции на N_i, но като функционали, и това ще доведе, както ще видимъ по-нататъкъ, до интегро-диференциални уравнения.

За така намѣренитѣ уравнения, поставя се задачата, ако тѣзи уравнения не могатъ да се интегрираръ, то поне да се намѣрятъ общитѣ свойства на интегралнитѣ функции, които представляватъ бройоветѣ на индивидитѣ въ различнитѣ видове. Очевидно е, че за да могатъ да се извлечатъ резултати, трѣбва да се прецизиратъ коефициентитѣ на нарастването въ съответнитѣ уравнения и ще се отиде толкова по-далечъ, колкото тѣзи коефициенти сѫ по-прости. Следователно, ще трѣбва да се направятъ още хипотези, които сѫ въ съгласие съ опита или сѫ най-малко твърде естествени, и позволяватъ съответното математическо изучаване. Когато хипотезитѣ постоянно се опростяватъ по начинъ, че да се доближаватъ до реалностьта, то едновремено математическитѣ резвития се усложняватъ.

Постановката на уравненията единъ пѫть направена, трѣбва да се изучатъ тѣзи уравнения чисто математически и да се дадатъ свойствата на интегралнитѣ функции. Следъ това остава най-сетне да се извлечатъ отъ тѣзи свойства биологични резултати. Сѫществено е да се отбележи, че уравненията иматъ биологиченъ смисълъ, само ако бройоветѣ на индивидитѣ N сѫ ограничени въ известни граници, необходими за валидностьта на хипотезитѣ, които опредѣлятъ тѣзи уравнения. Биологътъ ще извлече отъ свойствата на интегралитѣ действителни заключения, само когато тѣзи интеграли оставатъ ограничени въ тѣзи граници. Така уравненията губятъ своя смисълъ, щомъ като кое да е N остава твърде малко. Сѫщо тѣ могатъ да престанатъ да отговарятъ на действителностьта, ако различнитѣ N останатъ твърде голѣми, понеже това означава, че въ разгледаната ограничена срѣда, гѫстотата на индивидитѣ ще стане толкова голѣма, че условията за сѫществувание ще се промѣнятъ коренно.

Често пѫти, когато функцията N излѣзе вънъ отъ нейнитѣ граници, могатъ да се извлечатъ пакъ биологични последствия. Напримѣръ, ако N относително единъ видъ клони къмъ нула, като остава винаги положително, когато времето клони къмъ безкрайность, и различнитѣ N относително другитѣ видове оставатъ близки до доста голѣми числа, то може да се заключи за изчезването на разгледания видъ, понеже, като се тръгне отъ момента, въ който видътъ ще бѫде доста редуцираръ, и гдето уравненията не ще могатъ да се прилагатъ, това ще рече, че отъ този моментъ видътъ ще се намира винаги въ една редица отъ неблагоприятни условия, които ще причинятъ бързото унищожение и на останалитѣ сѫществуващи индивиди.

Всички резултати, които се добиватъ съ помощьта на математическия анализъ, сѫ очевидно, съ повече или по-малко точность, функции на хипотезитѣ, които служатъ въ постановката на уравненията. Сѫщитѣ мѫчнотии се представятъ

въ всички приложни науки. Напримѣръ, за да се изучи равновесието на едно твърдо материално тѣло, служатъ си съ рационалната механика, на която основнитѣ хипотези сѫ единъ простъ образъ на реалностьта; после, като се иматъ предвидъ резултатитѣ, които дава статистиката за дадената проблема, разглежда се, дали математическото решение има материаленъ смисълъ: напримѣръ, дали пресмѣтнатиятъ натискъ и обтѣгнатость сѫ поносими отъ тѣлото, т. е. дали въ условията на опита имаме право да разглеждаме тѣлото като идеално твърдо и което не се деформира.

Ето защо можемъ да кажемъ, че всички резултати, изведени съ помощьта на чисто математическо изследване на интегралитѣ на диференциалнитѣ и интегродиференциалнитѣ уравнения, трѣбва да бѫдатъ предметъ на разискване отъ биолога. Напримѣръ за единъ даденъ проблемъ, ако презъ течение на измѣнението една положителна функция N за известно време оставаше доста малка преди да клони къмъ една доста голѣма граница, биологътъ ще се запита, какво ще се случи съ вида презъ разглеждания периодъ. Аналогични мѫчнотии се случватъ при изучването на реалнитѣ и съвършенитѣ газове. До сега разглежданитѣ биологични въпроси отъ математическо гледище принадлежатъ по-скоро на рационалната фаза. Върху тѣзи, които ще изучватъ опитната провѣрка на добититѣ резултати, т. е. които ще навлѣзнатъ въ приложната фаза, ще падне грижата за по-дълбоко разискване на първоначалнитѣ хипотези и биологичната валидность на разсѫжденията, които се основаватъ главно върху опита, наблюдението и статистиката.

Най-сетне да разгледаме по-конкретно единъ случай, който е третиранъ отъ Wolterra отъ гледището на рационалната фаза и съ който най-ясно се манифестира ползата отъ математическото изучване на въпроситѣ отъ биологията и се дава горедолу идеята за начина на това изучване и за мѫчнотиитѣ, които математикътъ трѣбва да преодолява при тѣзи въпроси.

Нека сѫ дадени два вида, които живѣятъ заедно, и отъ които единиятъ видъ се храни съ другия. Въ срѣдата, гдето тѣзи два вида живѣятъ, първиятъ видъ N_1, отъ който се храни вториятъ видъ, ако бѣше самъ, то както показахме преди малко, коефициентътъ на нарастването е ε_1, който ще предположимъ постояненъ и положителенъ. Ако вториятъ видъ N_2, който се храни единствено или главно съ индивидитѣ на първия видъ, бѣше самъ, ще има коефициентъ на нарастването $-\varepsilon_2$, който ще предположимъ сѫщо постояненъ но отрицателенъ. Когато двата вида живѣятъ заедно въ една ограничена срѣда, първиятъ видъ ще се развива толкова по-бавно, колкото повече индивиди отъ втория видъ сѫществуватъ. Тогава най-проститѣ хипотези, които биха оправдали съжителството на тѣзи два вида, сѫ тѣзи, които водятъ до системата диференциални уравнения

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_1), \\[2ex] \dfrac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_2), \end{cases}$$

гдето γ_1 и γ_2 сж постоянни и се наричатъ коефициенти на изяждането. Отъ системата (5) се вижда непосрѣдствено, че тя се удовлетворява за постояннитѣ стойности $N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$ и $N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, които стойности даватъ стационерното състояние на двата вида. Обаче пълното изследване на интегралитѣ на тази система ще изоставимъ, понеже би ни отвлѣкло твърде далечъ. Ще споменемъ резултатитѣ на тѣзи изследвания, които могатъ да се оформятъ въ следнитѣ биологични закони:

I. Законъ за периодичния цикълъ. — Този законъ гласи: Колебанията на двата вида сж периодични, т. е. при известна двойка стойности на бройоветѣ на индивидитѣ близки до $\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$ състоянието на биологичното съжителство е постоянно и равновесието е стабилно.

Отъ системата (5) и следствие на периодичностьта на N_1 и N_2 добиваме формулитѣ

$$(6)\qquad \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K_1 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} N_1\,dt, \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = K_1 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} N_2\,dt.$$

Стойноститѣ K_1 и K_2 се наричатъ срѣдни стойности. Оттукъ се извежда непосрѣдствено:

II. Законъ за запазване на срѣднитѣ стойности. — Срѣднитѣ стойности на бройоветѣ на индивидитѣ на двата вида презъ единъ периодъ T сж независими отъ началнитѣ условия и сж равни на двата броя, които съответствуватъ на стационерното състояние при дадени стойности на коефициентитѣ на нарастването ε_1, ε_2 и на коефициентитѣ на изяждането γ_1, γ_2.

Най-сетне последниятъ твърде важенъ законъ е:

III. Законъ за преобразуване (пертрубации) на срѣднитѣ стойности. — Ако се унищожаватъ двата вида равномѣрно и пропорционално на бройоветѣ на тѣхнитѣ индивиди (и то достатъчно малко, че да сжществуватъ колебания), срѣдниятъ брой на индивидитѣ на изяждания видъ расте, а този на хищния видъ намалява.

Тукъ може да се отбележи, че ако се унищожава само хищния видъ, то срѣдниятъ му брой не варира, но този на нехищния расте. Напротивъ, ако се унищожава нехищния видъ, то срѣдниятъ му брой не се измѣня, обаче срѣдниятъ брой на хищния видъ намалява.

Сѫщо тукъ може да се отбележи, че периодътъ на малкитѣ колебания намалява, когато се унищожава хищния видъ; той се увеличава, когато се унищожава нехищния видъ; но и въ двата случая отношението на амплитудитѣ расте.

При изучването на еволюцията на разгледаното биологично съжителство се предполага, че причинитѣ иматъ непосрѣдствени ефекти, т. е. не се взема предъ видъ влиянието на ефектитѣ отъ миналото. На пръвъ погледъ се вижда, че това схващане е твърде несъобразно съ действителностьта, но то има преимущество да бѫде просто и позволява по-лесни математически развития. То показва, както ще видимъ следъ малко, пѫтя на една по-обща теория и начина, по който неговитѣ резултати могатъ да се разширятъ. Именно, ще трѣбва да разгледаме още и въздействието на ефектитѣ отъ миналото на сѫщото биологично съжителство.

Постановката на уравненията (5) произлизатъ отъ теорията на срѣщитѣ на индивидитѣ отъ двата вида, като се предполага, че тѣзи срѣщи иматъ непосрѣдственъ ефектъ, който се изразява чрезъ моментната вариация на бройоветѣ на индивидитѣ на видоветѣ. И, ако това е вѣрно за унищожавания видъ, то не е сѫщото за хищния видъ, който добива облаги отъ една срѣща. Напротивъ очевидно е, че благоприятниятъ ефектъ отъ една срѣща може да се прояви само съ известно закѫснение. Този периодъ е пренебрѣгнатъ при съставянето на системата (5).

Въ физиката при изучването на еластицитета, на магнетизъма и на електричеството се срѣщатъ аналогични явления, именно изопване и истерезия (т. е. закъснително намагнитяване). Така може да се каже, че въ неорганичния свѣтъ сѫществува сѫшо едно въздействие отъ миналото, като напримѣръ, въздействието на една обтѣгната нишка, на която всѣка непосрѣдствена деформация зависи отъ миналитѣ ѝ състояния.

За да се отбележи разликата между тѣзи явления на класичната и на небесната механика, гдето началнитѣ условия (функции и скорости) опредѣлятъ съ голѣма точность бѫдащето, Piccard е нарекалъ физиката на първитѣ явления н а с л е д с т в е н а. Сѫщото понятие е въведено и въ механиката.

Въ наследствената физика не сѫ вече достатъчни обикновенитѣ и парциалнитѣ диференциални уравнения, защото, ако това е така, началнитѣ условия биха опредѣлили бѫдащето. За да се отбележи влиянието на непрекѫсната редица отъ предшествуващи състояния (изразени съ безкрайно множество параметри, които образуватъ единъ континиумъ), трѣбва

да прибѣгнемъ до интегрални и интегро-диференциални уравнения, кждето фигуриратъ интеграли, въ които влизатъ характеристични параметри на една функционна система на времето презъ единъ предшествуващъ периодъ, разгледанъ въ момента. Въведоха се сжщо така и по-общи типове уравнения, кждето влизатъ функционални производни.

Както при разглежданото биологическо съжителство така и при биологическо съжителство отъ повече видове имаме пълна аналогия съ наследствената физика за вливнието на миналото. При този случай се въвежда пакъ понятието наследствена биология, безъ да се смѣсва обикновения смисълъ на това понятие, което означава предаване на характера на единъ индивидъ върху неговото поколение.

И така онова биологично явление се нарича наследствено, кждето непрекжснатата редица отъ минали състояния играе известна роля въ бждещата еволюция. Тукъ ще хвърлимъ единъ бързъ погледъ на този въпросъ за преди малко разгледания случай, като покажемъ, че интегро-диференциалнитѣ уравнения, къмъ които води математическото изучаване, сж аналогични на тѣзи отъ наследствената механика на неограничения свѣтъ.

Като се вземе предвидъ наследственото въздействие на биологичнитѣ явления и, разбира се, при сжщитѣ хипотези, при които сж изведени уравненията (5), достига се до следната система интегро-диференциални уравнения

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left[\quad \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \displaystyle\int_0^{\left\{\begin{smallmatrix}\infty\\ T_0\end{smallmatrix}\right.} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau\right], \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2\left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_2(t) + \displaystyle\int_0^{\left\{\begin{smallmatrix}\infty\\ T_0\end{smallmatrix}\right.} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau\right], \end{cases}$$

гдето ε_1, ε_2, γ_1 и γ_2 иматъ аналогични значения както въ уравненията (5), F_1 и F_2 сж функции, които зависятъ отъ ефектитѣ на миналото. Горната граница T_0 или ∞ на интеграла означава голѣмината на интервала, който указва миналото въздействие върху бждещата еволюция. Тѣзи уравнения се отличаватъ отъ уравненията (5) само съ интегралитѣ, които фигуриратъ въ скобитѣ, и които изразяватъ, че за всѣки видъ коефициентътъ на нарастването въ момента t зависи отъ миналитѣ промѣни на другия видъ.

Изучаването на системата (7) е тѣсно свързано съ динамиката на единъ параметъръ и следователно бихме могли да извлечемъ всички резултати на тази система отъ механиката.

Ще разгледаме само случая за една ограничена наследственость, т. е. както въ (7) вземемъ за горна граница на интеграла крайно време T_0.

Ако положимъ

$$(8) \qquad \Gamma_1 = \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, d\tau, \quad \Gamma_2 = \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, d\tau,$$

веднага се вижда, че биологичната система (7) се удовлетворява отъ стойноститѣ

$$(9) \qquad N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} = K_1 \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} = K_2,$$

които отговарятъ на стационерното състояние на биологичното съжителство и се наричатъ срѣдни стойности. Установява се, че тѣзи стойности могатъ да се изразятъ посрѣдствомъ интегралитѣ:

$$(10) \qquad \begin{cases} K_2 = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t} N_2(\tau)\, d\tau, \\ K_1 = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{1}{t - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{t} N_1(\tau)\, d\tau. \end{cases}$$

Чрезъ по-нататъшно изследване на сжщата система (7), което представлява единъ доста труденъ въпросъ на математиката, достига се до аналогични закони, които изказахме преди малко и които почиваха на по-малко правоподобни хипотези.

I. Законътъ за колебанията се видоизмѣня въ следния видъ: Ако бройоветѣ на видоветѣ не сж постоянни отъ известенъ моментъ, тѣ иматъ неопредѣлени колебания. N_1 и N_2 минаватъ безбройно много пжти презъ срѣднитѣ стройности K_1 и K_2 на стационерното положение.

Формулитѣ (10) изразяватъ закона за запазване на срѣднитѣ стойности: За всѣки видъ срѣдната стойность на броя на индивидитѣ между единъ производенъ моментъ и последователнитѣ моменти, клонящи къмъ ∞, и за които броя на индивидитѣ на сжщия видъ минава презъ едно екстремно положение, най-много равно на едно произволно, фиксирано число, има една граница (наречено асимптотична срѣдна). Тази граница не зависи отъ началното положение и сжщо отъ колебанията презъ времетраенето на наследствения периодъ, които колебания опредѣлятъ бждащитѣ колебания. Тази граница е стойностьта, която съответства на стационерното състояние.

Последниятъ законъ за преобразуване на срѣднитѣ стойности гласи: ако двата вида се унищожаватъ равномѣрно и пропорционално на бройоветѣ на тѣхнитѣ индивиди, то асимптотичната срѣдна расте за нехишния видъ и намалява за хишния видъ.

Ако се унищожава само хишния видъ, неговата асимптотична срѣдна не се измѣня, а тази на другиятъ видъ се увеличава. Напротивъ, ако се унищожава само нехишния видъ, неговата асамптотична срѣдна остава неизмѣнна, когато тази на другиятъ видъ намалява.

Сѫщо математичното изследване на уравненията (7) показва още невъзможностьта на една периодичность при наследственитѣ явления.

Въпрѣки че третирането на проблемитѣ отъ наследствената биология е още въ самото начало, при все това срѣщатъ се по-голѣми мѫчнотии отъ тѣзи на обикновената биология. Това се подчертава даже и съ разгледания примѣръ. Въ всички до сега изследвани проблеми използува се така наречената линейна наследственость. Ако въ проблематѣ на еластицитета, на електричеството или на биологията е изразена наследственостьта въ нейната цѣлость, то това ще ни доведе до функционални уравнения, които сѫ по-общи отъ интегро-диференциалнитѣ уравнения.

Резултатитѣ на разглеждания случай, дължими на Volterra, намиратъ пълна подкрепа отъ експерименталнитѣ изследвания на италиянския биологъ d'Ancona, които после бѣха потвърдени сѫщо отъ Marchi.

Статистическитѣ изследвания на d'Ancona се отнасятъ до количеството на рибата отъ класа на безхрущалнитѣ (Sélacien) въ пазаритѣ на Венеция, Триестъ и Фиуме презъ войната и въ близкитѣ периоди около нея. Това количество представлява почти цѣлия риболовъ на горната часть на Адриатическо море. Презъ периода отъ 1914—1918 г., гдето по причина на войната риболовътъ е билъ по-малко интензивенъ, би трѣбвало да се очаква едно относително нарастване на този класъ. Обаче, указало се, че, както преди войната, така и следъ нея, количеството на рибата въ тѣзи пазари е било почти едно и сѫщо. Съ тази само разлика, че преди войната хищнитѣ риби отъ този класъ, които се хранятъ отъ останалитѣ риби, се срѣщатъ по-малко. Напротивъ, следъ войната имало едно увеличение на хищнитѣ риби за смѣтка на нехищнитѣ. Това накарало d'Ancona да мисли, че при намаляване на риболова се фаворизиратъ хищнитѣ риби за смѣтка на рибитѣ, които се хранятъ съ растения и упадъци, и които сѫ главната храна на хищнитѣ риби. Това твърдение е напълно въ съгласие съ третия биологиченъ законъ. Сѫщото нѣщо е наблюдавано и въ Англия при лова на дивечъ.

Въ преди малко скицираното математическо изучване, както и въ всички изучвания на Wolterra, се излиза, обаче, отъ единствения фактъ, че колебанията на бройоветѣ на видоветѣ зависятъ само отъ взаимното имъ сѫществуване. Напротивъ, чиститѣ биолози търсятъ причината на тѣзи колебания винаги отъ измѣнението на физичнитѣ факти. Обаче, ако искаме да разгледаме жизнения процесъ въ неговата цѣлость и неговитѣ

отношения къмъ природата, не можемъ да изключимъ отнапредъ нито единия видъ причини нито другия. Може да се случи даже, че тѣзи причини указватъ едно и сѫщо въздействие при опредѣлянето на колебанията на бройоветѣ на видоветѣ. Ето защо налага се едно дълго и тѣсно сътрудничество между биолози и математици, за да се опредѣлятъ действителнитѣ причини на тѣзи колебания.

Най-накрай нека хвърлимъ единъ бѣгълъ гогледъ върху историята на математическото изучване на проблемитѣ отъ биологията, което датира отъ скоро време. Отъ дълго време естественитѣ науки използуватъ статистическитѣ методи, но пръвъ голѣмиятъ ученъ K. Pearson подновява изцѣло тази метода и създава така наречената биометрия. Полутеоретичнитѣ и полуекспериментaлнитѣ изследвания на Pearl върху нарастването на населението послужиха за база въ модерната демография. Ross установи съответнитѣ уравнения на паразитологигнитѣ въпроси върху маларията. W. Thompson даде интересни резултати върху математичната теория на действието на ентомофажнитѣ паразити. Lodka въ своята биология: Elements of Physical biology, New-Jork 1925 разглежда биологичното съжителство отъ два вида и даде едно геометрично представяне на вариациитѣ и периода на малкитѣ колебания. Въ една своя работа той въведе наследственото въздействие, но по единъ различенъ начинъ отъ този на Wolterra. По-после Wolterra, независимо отъ тази работа, въ нѣколко публикации отъ 1926 г. самъ намѣри по другъ пѫть резултатитѣ на Lodka. Освенъ това той даде общитѣ закони относително два вида и направи изучвания за едно биологично съжителство отъ *n* вида, като сѫщевременно разшири хипотезитѣ. Ще споменемъ сѫщо твърде интереснитѣ изучвания на Haldane върху математичната теория на подбора. Напоследъкъ се появи книгата на V. Kostitzin, въ която той третира разгледанитѣ въпроси отъ Wolterra и Lodka отъ съвсемъ ново гледище.

Почитаемо събрание,

Познанието на природата и на живота е нашата главна длъжность. Но математиката е единствена, която може да даде основата и ключа на това познание. Бихъ билъ особено поласканъ, ако отъ сега нататъкъ, тукъ, въ нашия университетъ, стана причинитель за едно по-интензивно сътрудничество между математицитѣ и научнитѣ работници на експерименталнитѣ науки и по този начинъ да спомогнемъ и ние за по-бързото и правилно изучване на мировото познание.

Die Rolle der mathematischen Analysis in den Problemen der Biologie.

Von G. Bradistilov.