Година XLIV 1947/48 год. Книга I.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Природо-математически факултет

ПРИМЕРИ ОТ РАЗВИТИЕТО НА МАТЕМАТИЧНИЯ АНАЛИЗ, КОИТО ОСВЕТЛЯВАТ ЕСТЕСТВОТО НА МАТЕМАТИЧНОТО ТВОРЧЕСТВО

(Встъпителна лекция, четена на 17 май 1947 г.)

От Любомир Илиев

В настоящето изложение ще бъдат разгледани някои случаи от развитието на математичния анализ, които осветляват естеството на математичното творчество. Да забележим веднага: тук ще става дума за математичните творби, а не за психичния процес, който придружава тяхното създаване. На мнозина поставянето на подобна тема ще се види странно. Когато у нас, в интелегентни среди, се заговори за творчество в математиката, обикновено, първото явление, което се констатира е една изненада. Хора със солидна образованост, с познания в точните науки, дори завършили математика или физика не могат и да си представят, че в математиката се правят завоевания, също тъй, както във всички други науки. Камо ли да повярват, че има причини, поради които творческият процес тук е по-буен и често пъти обуславя прогреса в много области на човешката деятелност. Преследвайки целта, която си поставихме, ние не ще можем да илюстрираме специално неограничените възможности в това направление. Все пак ще се натъкнем на достатъчно примери, от които, надяваме се, би могло да се разпръсне отчасти едно убеждение, представящо нащата културна общественост в не съвсем благоприятна светлина.

За да бъдем по-конкретни, ние ще предпочетем при избирането на примери да спираме вниманието си най-често към една определена математична област. Редица съображения [1]) ни карат да изберем някои части от теорията на обикновените диференциални уравнения.

Преди всичко, едно голямо число задачи на механиката, математичната физика, инженерните науки и много други области на нашето познание се свеждат към интегриране на диференциални уравнения. От една страна, математичните трудности срещани при интегрирането на тия уравнения, често пъти задържат решението на важни приложни задачи. Като

[1]) Вж. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории диференциальных уравнений, Москва, Ленинград, 1941, стр. 7 (введение).

пример в това отношение може да послужи задачата за трите тела в астрономията, невъзможността за пълното решение на която се обуславя от липсата на методи за интегриране на съответните диференциални уравнения. От друга страна, всеки прогрес в изучаването на диференциалните уравнения позволява автоматически да бъдат решени ред приложни задачи. Класически пример в това отношение може да служи случая с движението на едно твърдо тяло около една постоянна точка, изучен в работите на София Ковалевска или пък случаи от развитието на съвременната авиация.

Развитието на теорията на диференциалните уравнения същевременно е от извънредно значение за развитието на математичния анализ изобщо. Всред богатото разнообразие от функции, към които водят общите методи на съвременната теория на функциите, особен интерес представят класи от функции, удовлетворяващи диференциални уравнения от съвсем прост вид. Така напр. задачи от теорията на диференциалните уравнения ни водят към теорията на елиптичните функции, абелевите функции, автоморфните функуии и важните за теоретичната физика класи от специални функции като Лежандровите, Беселовите, функциите на Ламе, Матио и др.

Ако в теорията на диференциалните уравнения изхождаме от съображението, че съответните интеграли от геометрична гледна точка представят известни криви — интегрални криви, то за изучаването на тия интеграли могат да се изучат свойствата на интегралните криви.

„Интегралите на диференциалните уравнения обаче могат да се изучат и от друга гледна точка. Още Коши показал, че при твърде широки предположения относно характера на диференциалното уравнение, интегралите му представят аналитични функции. Така те могат да бъдат изучени с обикновените методи на теорията на функциите на едно комплексно променливо. От тая гледна точка интегралите на диференциалните уравнения се изучават в тъй наречената Аналитична теория на диференциалните уравнения. По такъв начин последната е част от общата теория на функциите на едно комплексно променливо“ [1]).

Желаейки да говорим за комплексен анализ и в изпълнение на поставената задача, ние ще предпочитаме именно да си служим с примери, илюстриращи прогреса на аналитичната теория на диференциалните уравнения. В това отношение, вземайки предвид особено високото ниво, широките възможности по отношение на кадрите и нуждите на нашия Математически институт в момента, както и основната роля, която се е падала винаги до сега на катедрата по Висш анализ, настоящето изложение ще представя и програма за едни евентуални

[1]) ibid. стр. 8.

бъдещи лекции, в духа на общоприетия план от Математическия институт.

Математичното съдържание на примерите, особено в първата половина на настоящето изложение, ще бъде понятно само за специалистите, за което прося извинение от аудиторията. Надявам се обаче, че връзката между това съдържание и изводите, които ще бъдат правени, могат да бъдат разбрани лесно от всеки, който пожелае да съсредоточи вниманието си върху проблемите, които повдигаме.

Началото на развитието на Аналитичната теория на диференциалните уравнения е свързано с името на основоположника въобще на съвременните методи в анализа — великият френски математик от първата половина на миналия век — Коши. В неговите работи за пръв път било доказано, за широки класи от уравнения, съществуването на интеграли, представящи аналитични функции на едно комплексно променливо. „Резултатите на Коши носили обаче локален характер; поведението на интегралите било изучавано само в области определени от началните условия; самият метод не давал възможност да бъдат изучени интегралите, като аналитични функции, в цялата им област на съществуване. В работите на Брио и Буке постановката на задачите носи вече много по-широк характер. Тям принадлежат и първите опити да построят общата теория на елиптичните функции, като се изходи от теорията на диференциалните уравнения“ [1]).

Съществен прогрес в тая област обаче бил получен след работите на Риман, идеите на когото цял век оросяват полето на математичното творчество, служейки за основа на редица най-модерни области от съвременната математика, оставайки същевременно и до днес непосредствено актуални.

Ако $w=u+iv$ е аналитична функция на комплексния аргумент $z=x+iy$ в дадена област, то тя удовлетворява в същата област уравненията

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

които, както отбелязва Клайн [1]), със забележителна историческа добросъвестност, която впрочем придружава почти неотклонно развитието на математиката през вековете, носят наименованието Коши-Риманови диференциални уравнения. При това не защото те се срещат за пръв път у тия автори — тях може да ги намерите и по-рано, но защото значението им за анализа,

[1]) ibid., стр. 8, 9.

[2]) F. Klein, Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Berlin, 19.6, част I, стр. 225.

В следващите бележки ще препращаме към руския превод на книгата, излязъл в Москва и Ленинград, 1937 г.

а то е изключително, е било изтъкнато отначало от Коши и, особено, впоследствие, от Риман. Риман именно ги поставя в основата на своите идеи, намирайки връзката им с геометрията и теоретичната физика. Така, от една страна, вследствие на тия уравнения, той показва, че посредством аналитичната функция w равнината x, y е изобразена конформно върху равнината u, v; от друга страна, от същите уравнения веднага следва, че функциите u и v удовлетворяват Лапласовото диференциално уравнение. Това дава възможност, в съгласие с основните резултати от теоретичната физика, на тия функции, според случая, да се даде различен физичен смисъл, напр, потенциал, температура и т. н. Всичко това послужило на Римана като източник на по-нататъшни дълбоки размишления. По тоя начин, именно въз основа на нагледността и опита, е станало ясно за Римана съществуването на простия поток в равнината и конформното представяне между повърхнините. И точно това активно оплодило неговото творчество — напълно аналогично на оня момент, в който от нагледното съществуване, от една страна, на движението на една точка и нейната скорост Нютон абстрахирал понятието за „флюксия", а от друга — на кривите и тяхните тангенти, Лайбниц намери пътя към съответното им пресмятане. Аз спирам вниманието Ви върху този момент, за да се почувства, че той не е нищо друто освен момента на откриването на един природен закон. За изследователя, снабден с модерните методи на математиката, остава да се гмурне в неговите глъбини, за да се разкрие хармонията на цял един неподозиран до тогава свят. При това, както при цитирания по-горе общоизвестен случай с откриването от Нютон и Лайбниц на инфинитезмалното смятане, така и при случая на Риман, по два съвършенно различни пътя се достига до откриването на едни и същи математични области. Този факт ни сочи достатъчно убедително, че поводът за математичното творчество може да дойде от най-различни посоки — еднакво вероятно от геометрията или физиката, от философията или естествознанието, от музиката или дори от поезията. Стига само да отразява някоя от безкрайното разнообразие на формите в реалността. По какъв начин пък обратно, с помощта на една изградена вече математична теория, можем да навлезем дълбоко в непознати още и то най-различни области на науките, което е основния ръководен стимул на всяко научно творчество, ще получим след малко непосредствена представа от някои приложения на Римановите теории. Тук искам обаче да отбележа, че въпреки разнообразието, за което загатваме, във всички конкретни случаи като горните, ние ни най-малко не се съмняваме, че става дума именно за математика и математично творчество, факт който вече недвусмислено говори за съществуването на едно поле от проблеми, откриването и изследването, на които представя изключително обект на математиката — една мисъл, която ние ще имаме случай да проследим и по-пълно в настоящето изложение.

Проследявайки идеите на Римана в анализа[1]), нека се спрем на неговата дефиниция за аналитична функция. Това, ще кажем днес, според Риман, е функцията, която се получава от един функционен елемент, зададен в някоя начална област, посредством непрекъснато продължение с помощта на Коши-Римановите диференциални уравнения.

Тая дефиниция от строго логично гледище по нищо не се отличава от общоприетата дефиниция на Ваерщрас. Тя притежава обаче неоценими приемущества поради свободата, която позволява при подбирането на средствата за нейното използуване.

На първо място, изхождайки от тая дефиниция, и от нагледните ни пространствени представи, Риман получил една геометрична интерпретация, която го довела до едно от найосновните понятия на съвременната теория на функциите. Продължавайки именно един функционен елемент по различни направления, може да се случи щото за едно и също значение на аргумента да получим различни значения на функцията. Оттук, имайки пред очи винаги конформното представяне, у Римана се създава идеята за римановите повърхнини, покриващи многократно равнината или части от нея. С един замах трудностите срещани от изследователите при сблъскновение с многозначните функции били преодоляни.

Но, ако $w=f(z)$ е аналитична функция на z, то въобще не само w е многозначна относно z, но и z е многозначна функция на w. На една област от повърхнината над z, ограничена по някакъв начин, отговаря тогава еднозначно и в общия случай конформно една област от повърхнината над w. С още една стъпка напред, замествайки конформното представяне с еднозначно и братимо непрекъснато представяне, ние навлизаме в нова геометрична област — топологията. В нея от особено значение е въпросът: кога две поърхнини могат да се изобразят еднозначно-обратимо и непрекъснато една върху друга.

Топологически една повърхнина се характеризира с числото p — максималното възможно число на едновременно възможните непресичащи се затворени сечения, които не разделят повърхнината на части и числото μ — равно на броя на контурните криви.

Като вземем предвид тази забележка, отговорът на горния въпрос е следния: необходимо и достатъчно условие, за да могат две повърхнини да се изобразят еднозначно-обратимо

[1]) По тия въпроси ср. Феликс Клайн, цитираното съчинение, специално глава VI, в руския превод стр. 288—314.

и непрекъснато една върху друга е съответните числа p и μ на двете повърхнини да съвпадат.

Риман никъде не формулирал тая теорема, смятайки я за очевидна, но я използувал майсторски, прилагайки я в своите идеи.

Да предположим сега, че w е алгебрична функция на z, т. е. че w удовлетворява едно алгебрично уравнение, коефициентите на което са полиноми на z. В такъв случай римановата повърхнина над z е затворена и за нея $\mu = 0$. Така повърхнината или, все едно, уравнението, се характеризират в случая само от инварианта p, стойността на който Риман определил и който тук носи името „род" (genre, Geschlecht) на уравнението или на съответната риманова повърхнина.

По такъв начин Риман достигнал до особено важния резултат, според който две алгебрични уравнения могат да бъдат преобразувани взаимно-еднозначно и непрекъснато едно в друго тогава и само тогава, когато имат един и същ род.

Доказателството и на тоя резултат, установяващ найхрактерната особеност на уравненията, които се трансформират едно в друго с помощта на бирационални преобразувания, за Римана произлизало от нагледните представи. Но дори и само с тия средства една нова интерпретация на идеите му го довела до основни резултати в съвършенно наво направление. Не по-малко плодовито се оказало и вмъкването на физични представи в неговата теория. И тук, с една непосредствена очевидност, се достига напр. до разширението на тъй наречената в теорията на функциите на едно комплексно променливо, първа теорема за съществувание, за случая на една област от някоя многолистна риманова повърхнина или за цялата повърхнина на Риман. Значението на всички тия резултати е неоценимо във връзка с непосредствените многобройни следствия и при изковаването на нови методи в анализа: твърдата крепост на учението за алгебричните функции и тяхните интеграли рухва още при първия щурм; основната роля на римановата теорема в конформното представяне е общоизвестна.

За да може обаче от една идея в математиката да се изковат сигурни методи, изпитани средства, с помощта на които смело и, често пъти, с предварително гарантиран успех да се навлиза в изследването на нови области, необходимо е всеки резултат да бъде доказан строго логично и с помощта на вече напълно проверени методи. Риман, в желанието си да подкрепи истинността на изводите от своите физични интерпретации, привлякъл и разширил при доказателството един метод от вариационното смятане, прилаган често и преди него с успех, именно тъй наречения принцип на Дирихле. От него бързо и лесно следвали предвидените резултати. Не след дълго обаче Ваерщрас, който по онова време подложил методите на анализа на строга логична ревизия и преоценка, показал, че обосноваването на самия принцип на Дирихле е недостатъчно и, евентуално, последният не е верен. За ония математици, които виждали само чисто формалната страна на Ваерщрасовите твърдения, теоремата за съществуване на Риман се оказала невярна и „на нейно място настъпила празнина". Самият Риман обаче, признавайки безспорно справедливостта на Ваерщрасовата критика, твърдял, че „той използувал принципа на Дирехле само като удобно, указващо се под ръка, спомагателно средство — неговата теорема е все пак вярна". Само един гениален откривател може да бъде така дълбоко уверен в резултатите, до които се е добрал! За него доказателството е средство, за да убеди другите в истинността им. Самият Ваерщрас поддържал същото становище, подбуждайки своя ученик Шварц да се заеме с изучаването на проблема и да потърси друго доказателство. Последният се справил бляскаво с тая задача, потвърждавайки предвижданията с пълното и строго доказателство на теоремата. Ние искаме след тоя пример да подчертаем една мисъл, към която ще се върнем впоследствие, именно, че математиката не се задоволява само с нагледни и интуитивни представи, а непрекъснато се стреми към създаването и логичното обосноваване на нови методи, които представят финни и мощни инструменти за навлизане в нови области. Същевременно, в пълно противоречие с наивната представа изобщо за математика и математици, нека обърнем внимание, по повод на горния пример, че самите методи подлежат на изменение и усъвършенствуване. Найсетне, във връзка със съдбата на Дирихлетовия принцип, нека отбележим, че много по-късно и изненадваще, с помощта на един съвършено нов метод, представящ мощен апарат в ред математически доказателства, Хилберт спаси първото Риманово доказателство, доказвайки строго верността на дирихлетовия принцип.

За да не бъдем голословни, когато говорим за методи в математичното изследване, ние ще покажем, макар и схематично, при един конкретен случай, систематичното им изграждане и значението им за получаване на нови резултати.

Както видяхме, Риман изучил основно алгебричните функции и тяхните интеграли. Последните, наречени още Абелеви, не са нищо друго освен решенията на диференциалното уравнение $\frac{dw}{dz} = \zeta$, гдето ζ е алгебрична функция на z, принадлежаща на някоя риманова повърхнина. С други думи, теорията на Абелевите интеграли може да се разглежда кото частен случай от теорията на обикновените линейни диференциални уравнения от някой ред n, при условие, че коефициентите му са функции върху една и съща риманова повърхнина. Както е известно, с помощта на квадратури, всяко линейно уравнение се привежда към хомогенно. Риман концентрирал вниманието си именно върху интегралите на тия уравнения.

Оставяйки настрана сложните случаи, нека предположим че коефициентите на едно такова уравнение са рационални функции от z, като по този начин ще оперираме в еднолистни области.

. За още по-голяма простота ще разгледаме линейните уравнения от втори ред

$$w'' + pw' + qw = 0, \tag{1}$$

гдето, да повторим, p и q са рационални функции на z.

Изследването на това уравнение се опростява извънредно много от неговото основно свойство, според което общият му интеграл се изразява линейно чрез два негови частни интеграла. При това, особени точки на интегралите могат да бъдат само особените точки на функциите $p(z)$ и $q(z)$. Слодователно, достатъчно е да се изучи поведението на интегралите в околността на полюсите на $p(z)$ и $q(z)$.

Нека $z = \zeta$ е една такава точка и w_1 и w_2 са два линейно-независими частни интеграла на уравнението (1). Ако K е затворена крива, съдържаща точката ζ, но не и друга особена точка на коефициентите на уравнението, да допуснем, че след като z изпише веднаж кривата K, функциите $w_1(z)$ и $w_2(z)$ преминават в $\overline{w}_1(z)$ и $\overline{w}_2(z)$. Последните са интеграли на уравнението и, следователно, ще се изразят линейно посредством $w_1(z)$ и $w_2(z)$. Т. е., ако z обиколи веднаж около особената точка ζ, върху функциите w_1 и w_2 се произвежда една линейна трансформация от вида

$$\overline{w}_1(z) = aw_1(z) + bw_2(z), \quad \overline{w}_2(z) = cw_1(z) + dw_2(z), \tag{2}$$

или, накратко,

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

гдето a, b, c, d са константи.

Можем да потърсим интеграли $\tau(z)$ на (1), които след една обиколка около особената точка да се трансформират в интеграла $\overline{\tau}(z) = \lambda\tau(z)$, гдето λ е константа. Оказва се, че са възможни два случая. В първия случай съществуват две различни константи λ_1 и λ_2, така че функциите

$$\tau_1(z) = (z - \zeta)^{\frac{\ln\lambda_1}{2\pi i}} f_1(z) = (z - \zeta)^{\varrho_1} f_1(z) \tag{3}$$

и

$$\tau_2(z) = (z - \zeta)^{\frac{\ln\lambda_2}{2\pi i}} f_2(z) = (z - \zeta)^{\varrho_2} f_2(z), \tag{4}$$

гдето $f_1(z)$ и $f_2(z)$ са функции допущащи лоранови развития около точката $z = \zeta$, притежават това свойство. Функциите (3) и (4) са линейно независими и определят общия интеграл на уравнението. Във втория случай $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогава съществува една константа k, така че функциите (3) и

$$\tau(z) = (z-\zeta)^{\frac{\ln\lambda_1}{2\pi i}}\{f_3(z) + k\ln(z-\zeta)f_4(z)\}, \tag{5}$$

гдето $f_3(z)$ и $f_4(z)$ са Лоранови развития около $z=\zeta$, определят общия интеграл. Намерените функции характеризират особените точки на уравнението.

Нека забележим, че ако някоя от функциите $f_k(z)$, $k = 1, 2, 3, 4$ има в точката ζ полюс, то с подходяща детерминация на $\ln\lambda_1$ и $\ln\lambda_2$ можем да заменим тая функция с едно тайлорово развитие.

Следвайки терминологията на Фукс, ние ще наречем една **особена точка** на уравнението (1) **регулярна**, ако в съответните интеграли (3) и (4) или (3) и (5) на уравнението, функциите $f_1(z)$ и $f_2(z)$ съотв. $f_1(z)$, $f_3(z)$ и $f_4(z)$ имат в тая точка плюс. В противен случай особената точка се казва **нерегулярна**. Тия наименования се обясняват с направената забележка.

Да допуснем сега, че точката $z=\zeta$ е регулярна особена точка за интегралите на (1). Не е трудно да се покаже, че в тоя случай, функциите $p(z)$ и $q(z)$ имат съвсем прост характер в околността на тая точка. Съществува именно следната основна теорема на Фукс:

Интегралите на уравнението (1) имат в $z=\zeta$ регулярна особена точка тогава и само тогава, когато ζ е полюс на $p(z)$ най-много от първи ред и на $q(z)$ най-много от втори ред.

Линейните диференциални уравнения, интегралите на които имат всичките си особени точки регулярни представят особен интерес и носят наименованието уравнения от класата на Фукс.

Нека разглежданото от нас уравнение принадлежи на класата на Фус. Да предположим, че познаваме интегралите $\tau(z)$ на уравнението, характеризиращи всяка от особените му точки и да предположим, че съответните константи $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ за всяка особена точка a_k са различни.

Между тия показатели съществува една релация (на Фукс), видът на която зависи от това дали безкрайната точка в равнината е обикновена или регулярна особена точка на интегралите на уравнението.

Особените точки и показателите $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ определят еднозначно функцията $p(z)$. Напротив, във функцията $q(z)$ остават неопределени известни акцесорни коефициенти, броят на които е $n-2$, ако несобствената точка в равнината е особена и $n-4$, ако не е особена точка за съответните интеграли.

Особен интерес представя случая, когато показателите $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ определят напълно коефициентите на диференциалното уравнение, т. е. когато в $q(z)$ няма акцесорни коефициенти. При допълнителното условие, че всички особени точки на интегралите се намират на крайно разстояние, според казаното, това е възможно само когато $n < 4$. С други думи, пълното определение на уравнението по показателите $\rho_1^{(k)}$ и $\rho_2^{(k)}$ е възможно само, ако броят на особените му точки е един, два или три.

Първите два случая водят до съвсем известни уравнения. Много по-интересен се явява случая, когато броят на особените точки в уравнението на Фукс от втори ред е три. Ако означим тия особени точки с a_1, a_2, a_3, уравнението може да се напише в следната форма (на Папериц):

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \frac{A_3}{z-a_3}\right) w' + \left(\frac{B_1}{z-a_1} + \frac{B_2}{z-a_2} + \frac{B_3}{z-a_3}\right) \cdot$$

$$\frac{w}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} = 0,$$

гдето $A_k = 1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}$, $B_k = \rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})$, $k = 1,2,3$.

Това уравнение се нарича уравнение на Риман. То е било предмет на изследване от редица големи математици, между които може да се упоменат Гаус, Риман и Кумер. Неговите коефициенти, а следователно и интегралите му, са определени напълно от положението на особените му точки и показателите ρ. Последният факт, както ще видим, послужил като изходна точка на Риман в една негова забележителна работа, при изучаване интегралите на това уравнение.

Посредством това уравнение в анализа се дефинира една категория функции от особено значение. В частни случаи, интегралите му дефинират функции, които имат в теоретичната физика едно изключително приложение, като напр. Сферичните или Беселовите.

Възвръщайки се отново към общите линейни диференциални уравнения от втори ред, да означим с w_1 и w_2 два линейно независими частни интеграла и с a_1 и a_2 две особени точки на едно такова уравнение. Ако L_1 и L_2 са две прости затворени криви, минаващи през точката z_0, от които първата съдържа сама особената точка a_1, а втората само a_2, то, след като обиколим точката a_1 по кривата L_1 ще получим една трансформиция:

$$S_1 = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix};$$

по същия начин, като обиколим a_2 по L_2, ще имаме трансформацията

$$S_2 = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}.$$

Ако L' и L'' са други две криви със същите свойства, както L_1 и L_2, то след като z изпише кривата L' или L'' ще получим пак същите трансформации S_1 или S_2.

Нека най-сетне L_3 е затворена крива, минаваща през z_0, във вътрешността на която се намират точките a_1 и a_2, но не и други особени точки на уравнението. Като обиколим точките a_1 и a_2 по кривата L_3, ще получим една нова трансформация Σ. Оказва се, че

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{Bmatrix}.$$

Нека изобщо S_1 и S_2 са две трансформации. Трансформацията Σ наричаме произведение на S_1 и S_2, което означаваме: $\Sigma = S_1 S_2$. Очевидно, това произведение не е всякога комутативно. По тая дефиниция можем да образуваме произведението на произволен брой трансформации. Лесно се вижда, че произведението е асоциативно.

Да разгледаме сега всичките (краен брой) особени точки на уравнението и съответните трансформации, които претърпяват линейно независимите интеграли w_1 и w_2 при обикаляне на всяка една от тия точки поотделно. Една такава трансформация се нарича основна. Ако L е произволна затворена линия, която не минава през никоя особена точка, то трансформацията, съответствуваща на едно описване на тая линия е произведение от някои степени на основните трансформации. При това между последните съществува една релация.

Да разгледаме съвокупността от трансформации, дефинирана по следния начин: ще казваме, че една трансформация принадлежи на тая съвокупност, ако линейно независимите частни интеграли w_1 и w_2 претърпяват тая трансформация след изписването на някоя затворена крива, не минаваща през никоя особена точка на уравнението.

Оказва се, че тая съвокупност образува група по отношение на дефинираното произведение. Произволен елемент от нея, както казахме по-горе, може да се представи като произведение от някои степени на основните трансформации. Групата, следователно, е крайна. Очевидно, тя зависи съществено от първоначално избраните интеграли w_1 и w_2. Ако излезем обаче от два кои да са други линейно независими частни интеграли, то групата, която ще получим посредством тях ще бъде тясно свързана с първата. Всички така получени групи ще бъдат именно изоморфни, така че могат да се считат за неразлични. Явява се проблема да се определи броят на константите, които определят напълно една коя да е от тия групи на диференциалното уравнение.

В случая на едно линейно диференциално уравнение от n-ти ред с $s+1$ особени точки, излизайки от n линейно независими частни интеграли, въпросът се свежда до определяне на основните трансформации. Оказва се, че последните зависят от $n^2(s-1)+1$ константи, които напълно ги определят. С това е определена и търсената група. Понеже ако излезем от някоя друга система частни интеграли ще получим група изоморфна с първата, то, следвайки Поанкаре, всички тия групи се считат за неразлични — за една група. Тази група в случая се съвпада с групата на монодромност на диференциалното уравнение. Членовете на всяка система от константи, която определя еднозначно групата на монодромност, според Поанкаре, се наричат инварианти на групата. Според казаното, групата се определя от $n^2(s-1)+1$ инварианти. Сега можем да си зададем въпроса, с който отново идваме до съприкосновение с Риманови идеи: в кои случаи групата е определена напълно от показателите ρ, характеризиращи особените точки на уравнението? Очевидно това е случаят, когато броят на тия показатели е равен на броя на инвариантите на групата. В частност това е така при разгледаното уравнение на Риман.

Всички изложени до тук резултати [1]), относно линейните диференциални уравнения, дължим на Фукс и неговата школа. От тях уравнението на Риман се явява като частен случай. Към това уравнение, резултатите на Риман относно което всъщност са дали повод въобще за изследванията в тая област, може да се дойде по съвсем друг път, тясно свързан с групата на монодромност на диференциалното уравнение, който бил показан от самия Риман, и който води до една от най-интересните задачи на съвременната теория на функциите на едно комплексно променливо, решението на която не следва направо от резултатите на Фукс, и която дълго време е противостояла на усилията на математиците — именно към тъй наречения проблем на Риман. Така се навлиза по-дълбоко в същината на разглежданите проблеми. Тук още един път проявява своето значение основната тенденция в разсъжденията на Риман: да се изясни функцията не по формули, а по нейните основни свойства — в пълно противоречие с изложените методи на Фукс.

Интересно е да се отбележи, че Риман, който по тоя въпрос е публикувал само споменатата вече статия върху хипергеометричните функции, е дал, както това се установява от посмъртното издание на непубликуваните му работи, още много време преди публикациите на Фуксовата школа, най-общата формулировка на проблема, без обаче да завърши докрай изследванията си. Цели 30 години след установяването на тоя факт математиците не разполагали с методи за неговото цялостно разрешение.

---

[1]) Вж. подробното им изложение напр. във В. В. Голубев, цитираното съчинение, специално глава IV, линейни уравнения, стр. 187—234.

В зората на творческия двадесети век обаче, в математиката се появиха три нови области, непознати на миналите столетия, в необятните дебри на богатото разнообразие от нови идеи, на които бяха погълнати творческите усилия на болшинството от модерните изследователи, за да подготвят редица триумфи главно из областта на реалния и комплексен анализ. Между другото в 1905 год., с помощта на развилата се именно в това време теория на интегралните уравнения, Хилберт успя да разреши окончателно проблема на Риман, с което отново напълно се оправдаха предвижданията на един от най-големите аналисти от втората половина на миналото столетие.

Ние вече нахвърляхме достатъчно факти, за да има нужда от известна систематика. Изтъкнат беше момента на първичното, нагледно опознаване на действителността и връзката му с математичното изследване. Показахме значението на математичния подход, когато се изхожда от тия непосредствени представи, с възможностите, които той дава за навлизане в нови области и откриване на резултати неизвестни до тогава на науката — най-съществено потвърждение за автентичността, както на първичните понятия, така и на употребените методи. С резултатите на Фуксовата школа илюстрирахме, макар и бегло, систематичното изграждане от основните идеи на нови математични методи — основни инструменти в математичните доказателства. Във връзка с методите изниква особено важния въпрос, на който предстои да спрем вниманието си отново, именно въпросът за логичното им съвършенство. Същевременно, както в случая при окончателното утвърждаване на Дирхлетовия принцип, така и при проблема на Риман, става нужда да бъдат заимствувани методи от модерни области добили в късо време неочакван разцвет, благодарение от една страна на многобройните завоевания въобще в различните клонове на математичния анализ и от друга, поради съвършенно новите идеи, които бяха поставени като основа при изграждането на една математична наука, ролята и значението на която е необходимо да отбележим тук.

Когато в анализа става дума за строгост и логична съвършеност, обикновено се преплита името на Ваерщрас, който, както бележи Клайн, „е станал за днешните поколения представител изключително на чистата математика". Имайки именно предвид значението му за оформяване на съвременните схващания в математиката въобще и, от друга страна, в много случаи чисто формалното, бих казал, техническо разбиране на горната мисъл на Клайн, нека спрем вниманието си на един пасаж [7]) от неговата академична реч:

„Аз мисля, че между математиката и естествените науки би трябвало да бъдат установени по-дълбоки взаимоотноше-

---

[7]) Вж. напр. Ф. Клайн, цитираното съчинение, стр. 325.

ния, отколкото тия, които биха настъпили, ако напр. физиците гледат на математиката само като на спомагателна дисциплина, макар и необходима, а математиците разглеждат въпросите, които им поставя физиката, само като богата сбирка от примери за своите методи. Аз не бих могъл да развия по-нататък тия възгледи, които ми са твърде близки. На въпроса обаче, който аз вече долавям, дали действително е възможно да се получи каквото и да е непосредствено приложение на тия абстрактни теории, с които предпочитат да се занимават съвременните математици, аз мога да отговоря, че гръцките математици изучавали свойствата на коничните сечения по чисто умозрителен път, дълго преди някой да е подозирал, че те са пътищата, по които се движат планетите, и аз вярвам, че ще бъдат намерени още много функции с такива свойства, както например знаменитата тета-функция на Якоби, с помощта на която може да се узнае на колко квадрата се разлага произволно зададено число, как може да се ректифицира дъгата на елипсата и същевременно, както аз днес добавям, дава възможност да се намери истинския закон за люлеенето на махалото.“

Всяка дума прибавена към първата основна мисъл в горния цитат, забележете, на един от най-абстрактните математици, относно органичната връзка на математиката с природните науки, би била не само излишна, но и вредна. Прекрасната мисъл обаче за значението на абстрактните теории в математиката, илюстрирана с толкова ярки примери дава възможност за разнородни тълкувания, главно в областта на философията. Нека отбележим, че дори и съвременни диалектици, като Колман, допущат, с известни претълкувания, и винаги под началното въздействие на непосредствената сила в горния пасаж, възможността за априорност в математичните познания. Дали мисълта на Ваерщрас търпи едно такова тълкувание, надяваме се да имаме по-ясна представа след малко. Ако обаче е въпрос за значението на абстрактните теории в някои науки, съвременното състояние на математиката и теоретичната физика би ни дало много по-очебийни и ярки илюстрации. Отминавайки всички общоизвестни факти, като напр. откриването на електромагнитните вълни, бих желал да спра вниманието Ви, с оглед на поставените в това изложение задачи, върху съвременните представи за вселената в теоретичната физика, подчертавайки, че те можаха да се оформят, без да отричаме тяхните изключително физични основи, само след големите завоевания в геометрията от миналия век и окончателното избистряне на понятията в нея. Днес не е и мислимо да си представим модерен физик, който не знае що е Лобачевска или Риманова геометрия. Така ние достигаме до първоизточника, до извора на съвременния научен мироглед, до човека, който разруши догмите за „единствената истинност на евклидовата геометрия“, тъй както Коперник разруши догмата за неподвижността на земята, — до Николай Иванович Лобачевски.

Откритието на неевклидовата геометрия като факт сам по себе си има колосално значение за цялата съвременна математика и науките свързани с нея. Един от най-големите съвременни тополози, съветският математик П. С. Александров пише[1]): „Лобачевски убедително показал, че неговата геометрия е една от няколкото логически равноправни геометрии, еднакво безупречни, еднакво пълноценни от логична гледна точка, еднакво истинни в качеството им на математични теории. Въпросът се състои в това: коя от тия теории е истинска във физичен смисъл, т. е. най-добре е приспособена към изучването на тоя или оня кръг от физични явления". С други думи, противно на очакванията на лаиците, евентуалното утвърждение в бъдеще на факта, че някоя от геометриите най-добре интерполира, най-добре се нагажда до формите на физичното пространство с нищо не ще накърни истинността на останалите геометрии.

Общоматаматическото и филисофско значение на геометрията на Лобачевски е колосално: „Неговото откритие произвело съществен тласък в положението на математиката всред общата система на познанието ни за природата. В XVIII век математиката заемала всред това познание наистина твърде важно, но все пак по същество, служебно място: в математичния анализ по времето на Ойлера, представителите на астрономията, механиката и физиката от тая епоха, виждали само съвокупност от методи за решения на задачи, поставени от точните естествени науки; математикът бил длъжен да състави деференциалните уравнения на тази или онази механична или физична задача и да даде методи за решението на тия уравнения. Учените от тая епоха били далеч от мисълта, че математиката сама по себе си, а не само чрез посредничеството на физиката и астрономията осъществява значителна част от нашето познание за реалния свят и че тая самостоятелна познавателна рол на математиката е свързана неизбежно с наличието у нея на свой собствен предмет. Именно към съществуването у математиката на собствен предмет за изследване ни водят работите на Лобачевски"[2]).

Така творчеството на великия Лобачевски окончателно утвърждава една мисъл, която ние няколкократно изтъквахме, проследявайки някои моменти, съществени за развитието на математиката — съществуването на един сектор от проблеми, изследването на които е изключително задача на математиката. С това съвсем не искаме да отречем здравата спойка, органичната връзка и пълната възможност за взаимстване на методи и идеи между математиката и другите науки. Така се

---

[1]) Вж. П. С. Александров, Великий руский математик Лобачевский, Москва 1944, стр. 12.

[2]) П. С. Александров, цитираното съчинение, стр. 9.

осъществява именно единството в екзактните науки и непрекъснатостта в научните познания.

Делото на Лобачевски същевременно определя най-добре и естеството на математичните проблеми. Във връзка с въпроса за характера на тия проблеми не е безинтересно да се отбележи мимоходом, че Риман, по време на разцвета на своето творчество пише: „Главната моя работа се състои в една нова трактовка на природните закони". Който желае обаче, да вникне дълбоко в същината и съдържанието на математичните науки, неминуемо трябва да опознае идеите на Лобачевски.

Съществуването на собствен предмет на математичното познание, ни дава възможност да направим други интересни заключения във връзка с повдигнати тук въпроси. По една особеност на математиката, изследванията в нея се извършват върху един минимален брой основни обекти и техни взаимоотношения. Вследствие на това нейно качество, на тая „семплост", излизайки от природни закони, със собствени методи, математиката е способна в късо време да регистрира мощен напредък, изпреварвайки в известно направление другите науки, достигайки до природни явления много преди тях, поради сложността въобще на проблемите на последните. И ето, че когато някоя друга наука X достигне в развитието си до някой нов резултат в същата посока и с изненада се констатира, че в математиката е познат вече подобен факт, изведнаж се приписва качеството на последната да бъде „априорна" — само защото тя не е изчакала именно точно този експеримент, с който е било открито явлението в науката X. Математиката има свой собствен опит и собствени методи в своя собствен предмет. Ние достатъчно изтъкнахме връзката ѝ с природата, за да коментираме повече. Ще забележим само, че след всичко изложено, тълкуванието, което обикновено се дава на разгледаната мисъл на Ваерщрас, с което се вади заключението за априорност в математичните познания, ни изглежда неосновано. Мисълта на Ваерщрас само изтъква, с една чудна сила и правдивост, значението на математичните изследвания за прогреса на науките въобще.

Обръщайки се отново към Лобачевски, нека отбележим, че неговата основна заслуга в науката се състои в това, че той първи прозрял докрай логичната недоказуемост на Евклидовата аксиома за паралелните прави и извел от тая недоказуемост всички основни математични изводи. „Получавайки убеждение в непротиворечивостта на построенатата от него геометрична система, Лобачевски не дал строго доказателство за тая непротиворечивост; пък и не би могъл да даде, тъй като такова едно доказателство надхвърляло далеч пределите на развитието на математиката в началото на XIX век. Доказателство за непротиворечивост на геометрията на Лобачевски, дали едва в края на миналия век Келли, Поанкаре и Клайн“[1]). Тогава, когато, след като подхвърли на дълбока анализа и преоценка многобройните резултати, които математиците бяха натрупали от една страна следвайки свежите и богати идеи на Лобачевски, а от друга — модерното развитие на анализа, Хилберт, ние вече за трети път се натъкваме на това име, успя да избистри окончателно основни за математиката понятия, полагайки основите на съвременния аксиоматичен метод за изграждането на една екзактна наука — определяйки всъщност съвременното съдържание на понятието наука. И нека добавим веднага: поводът, основната идея, която доведе математиците до тоя мощен съвременен метод се корени в процеса на творческото опознаване на света, основен принос в който бяха резултатите на Лобачевски. Така и най-финният инструмент в съвременната математика е поставен върху най-солидна основа. Само така можем да си обясним думите на съветския учен В. Молодший, в неговата книжка „Еффективизм в математике“, която си позволявам да препоръчам на вниманието Ви, и в която е казано: „Аксиоматичният метод преди всичко е метод за търсене на нови факти, а не само за логично обосноване на познатите такива“ (стр. 14). С помощта на аксиоматичния метод и понятието изоморфизъм, в съвременната математика се обличат в общо единство понятия, които за обикновените ни представи са съвсем несвързани помежду си. Така се постига почти парадоксалния резултат, значението на който изтъкнахме, че в процеса на своето разширение и своя прогрес, математиката се опростява. Разбира се, в строго определен смисъл. Всъшност днес математиката или по-право математичните науки се изграждат напълно абстрактно с помощта на аксиоматичния метод. Само една така изградена наука може да устои на съвременните изисквания на математиката за логическа прецизност. Самото математическо творчество често пъти обаче, както ние вече многократно показахме, е независимо от моментните ни възможности при логическото обосноване. И до днес, а сигурно и за дълго още. болшинството от математичните науки, между които и анализа, не могат да се изградят напълно аксиоматично. Въпреки това творческият процес в тях е нестихващ. Непренебрегвайки стремежа да бъдат изнесени тия науки на едно по-високо ниво, каквото безспорно е тяхното аксиоматично изграждане, нека отбележим, че творческият процес има много по-дълбоки корени, за да се задоволи само с възможностите в това направление.

Наред с философското и общоматематичното значение на неевклидовата геометрия, самото ѝ непосредствено приложение в другите оттдели на математиката, напр. в теорията на функциите на едно комплексно променливо, е неоценимо.

---

[1]) П. С. Александров, цитираното съчинение, стр. 9.

Последното обстоятелство е от особено значение за нас, поради което всъщност ние спряхме вниманието си върху Лобачевски.

След съществения прогрес в аналитичната теория на диференциалните уравнения, получен в работите на Риман и Фукс, гдето както видяхме, била изучена дълбоко теорията на линейните диференциални уравнения, следват работите на Фукс и Поанкаре, в които били изучени подробно нелинейните уравнения от първи ред (1884—1885). Най-сетне, Поанкаре и Клайн (1878—1890), разработили теорията на тъй наречените автоморфни функции. Значението на тия функции в анализа се определя преди всичко в това, че болшинството от най-простите функции там са автоморфни. Много по-дълбоки основания за тяхното проучване намираме във факта, че развитието на тяхната теория води към ред най-сложни проблеми на математичния анализ. Теорията на автоморфните функции е тясно свързана с теорията на алгебричните функции, в частност със задачата за униформизирането на алгебричните функции, а така също и с по-общата задача за униформизирането на многозначните аналитични функции, която пък от своя страна е свързана с интегрирането на линейните диференциални уравнения.

За да бъдем по-конкретни, нека кажем, че една функция се нарича автоморфна, когато е инвариантна по отношение на някоя група от дробни линейни трансформации.

Отначало била разработена теорията на автоморфните функции, които са инвариантни по отношение на трансформации, образуващи специални групи на движение в евклидовата геометрия.

Естествено е да се потърсят функции, които са инвариантни по отношение на някои групи от движения в равнината на Лобачевски. За това е необходимо преди всичко да се намери една интерпретация на равнинната геометрия на Лобачевски върху комплексната равнина. Тоя проблем бил разрешен от Поанкаре, което дало възможност да бъдат построени автоморфни функции, които са инвариантни по отношение на известни групи движения в равнината или пространството на Лобачевски. Първите били наречени функции на Фукс, а вторите — функции на Клайн — названия дадени от Поанкаре.

Теорията на Фуксовите и Клайновите функции всъщност представя теорията на автоморфните функции, тъй като само те откриват за математиката съществено нови класи функции.

Тия приложения на резултатите на Лобачевски още един път илюстрират значението на неговите велики идеи.

Изобщо, като учен Лобачевски се явява революционер в науката в пълния смисъл на тия думи. Неговото дело обаче заблестява ослепително, ако се вземе предвид ясното съзнание, което той е имал за значението на своето откритие и непрекъснатата борба, която е водил, за да го наложи. Неразбран и до смърта си, непризнат и осмиван, огорчаван от авторитети на своето време, той не пропуснал нито едно средство, за да го представи на вниманието на световната мисъл.

По-нататъшното развитие на въпросите, които разглеждаме е бързо и многостранно. Паралелно с изследванията на Поанкаре и Клайн в работите на Ермит и Щварц били изучени някои частни типове автоморфни функции, т. н. модулярни и полиедрични функции, свързани с диференциални уравнения от втори ред. Клайн довежда тия изследвания докрай. Трябва да се отбележат също изследванията в аналитичната теория на диференциалните уравнения по това време на София Ковалевска (1889), във връзка с движението на твърдо тяло около една неподвижна точка и тия на Пикар. На Пикар принадлежат цял ред съществени допълнения по различни изследвания на аналитичната теория на диференциалните уравнения и дълбоки изследвания по теорията на алгебричните функции, които позволяват да се обосноват и предвижат напред съществено изучванията в някои въпроси от аналитичната теория на диференциалните уравнения. „Блестящи резултати в това направление били получени от Пенлеве. Нему принадлежат съществени допълнения към общата теория на диференциалните уравнения от първи ред и дълбоки изследвания по теорията на уравненията от втори и по-висок ред. В работите на Пенлеве (1888—1905) за пръв път е прокарана систематично идеята да се изследват интегралите на диференциалните уравнения, като аналитични функции във всяка област на тяхното съществуване, непосредствено по диференциалното уравнение"[1]).

От тук нататък, и до наши дни, започва един нестихващ поток от публикации върху изследвания задълбочаващи и разширяващи разглежданите въпроси. Методите на Пенлеве били разпространени от Гамбе, Гарние, Шази и други, върху много по-широки класи от уравнения. В съвсем друго направление имаме изследванията на Малмквист (1914), Хил, Шлезингер, Лапо-Данилевски (1927—31). Ние само отбелязваме някои върхове без дори и да загатваме за богатото разнообразие от изучвания в същата област пръснати из многобройните математични журнали, разрешаващи конкретни проблеми.

Така, излизайки от свежите идеи на Коши, Риман, Лобачевски и докосвайки се само бегло до съществените етапи от развитието на една област от анализа, ние констатираме създаването, след упоритите усилия на големи и малки изследователи, на един богат комплекс от резултати и методи, които от една страна представят мощни инструменти при разрешаването на конкретни и практични проблеми, а от друга — откриват широки възможности за разкриването на природните тайни. Ние бихме искали да отбележим, че в математиката това явление

---

[1]) В. В. Толубев, цитираното съчинение, стр. 9.

съвсем не е случайно или характерно за разгледаната област. В който и да е неин клон, проследявайки някоя основна идея, може да се констатира, след един по-къс или по-дълъг период на творчески усилия, подем, в резултат на който нивото на нашите познания, в зависимост от основната идея, се повишава малко или много. Въпросът не е в това дали има възможност за творчество в математиката — неограничените простори в това направление, както впрочем навсякъде в човешката деятелност, са осигурени и ние се надяваме, че всеки присътствуващ тук, има вече поне една макар и смътна представа за това. Да се открие обаче хармонията всред наглед хаотичното разнообразие от резултати често пъти е непреодолим проблем и за даровития начинаюш.

Драги студенти!

Още Пушкин е казал: „Вдъхновението в геометрията е също така необходимо, както в поезията". На младежта е свойствено да се вдъхновява от големи дела. Най-прекрасните творби, най-смелите идеи на великите майстори в изкуствата и науките са или непосредствена рожба на младенческа жар, или зряла преработка, след дългогодишно обмисляне на идеи, отражаващи младежки импулси. Творческият път в математиката е открит пред всеки, която се вдъхновява от нейните проблеми. „Но какво е това вдъхновение? Явява ли се то като нещо такова, което връхлита на човека без каквито и да било усилия от негова страна, което той е длъжен да очаква, както моряците чакат попътния вятър? Ако вие се справите с биографиите на великите хора: велики музиканти, поети, художници, учени, то вие никъде няма да намерите това тъй наречено „вдъхновение" в смисъл на нещо независимо от усилията на самата творческа личност. В тоя смисъл то се явява свойствено само на безнадеждни дилетанти, а всяко истинско творчество се създава по пътя на колосално напрежение на всички волеви сили: самото вдъхновение не е нищо друго, освен концентрация на всички сили на дадена личност върху даден предмет и само с тази огромна концентрация на силите — волеви, интелектуални, емоционални, т. е. всички сили, с които разполага човека, фактигески се достига творчески резултат"[1]). Делата и на най-големите творци, се придружават, са обосновани от колосална работоспособност. Съмнения и непрекъснати търсения придружават неминуемо усилията на всеки сериозен изследовател. Самият Лобачевски включил във фамилния си герб пчела, като символ на трудолюбие. Всеки който желае да твори в математиката трябва отрано да култивира у себе си качествата

---

[1]) П. С. Александров, цитираното съчинение, стр. 16.

на постоянство, системност и любов към работата, които ще му бъдат абсолютно необходими при опознаването на цялата обширна литература, която ще го въведе към модерното състояние на въпросите, от които се интересува. Не може да се наслаждаваме на безкрайни хоризонти преди да извървим пътя до върха. Веднага обаче, на ония, които биха пожелали да използуват тоя съвет, бих желал, когато става дума за трудолюбие и работоспособност, да процитувам думите на Клайн[1]): „Нужно е да се учим на изкуството из необятното количество съществуващ в литературата математически материал, да извличаме основните идеи и тяхните общи връзки помежду им, без разточително губене на време за преработка на много частни случаи и в същото време да не изпадаме в дилетантство и повърхностност. Само по тоя начин се придобива всестранна математична образованост, без която не би тябвало да излиза[2]) из университета никой из желаещите да работят по нататък".

[1]) Ф. Клайн, цитираното съчинение.

[2]) В оригинала: „не бих пуснал да излезе"