Д О К Л А Д

З А Я Р О С Л А В Т А Г А М Л И Ц К И

изнесен пред отчетната сесия на сектора по

реални функционален анализ

на 11 декември 1984 година

Вл.Чакалов

Измина една година, откакто професор Тагамлицки не е между нас. Погледнато исторически, този срок е твърде кратък. Все пак, той е достатъчен за да можем, ако не да обхванем и преценим, то поне да съзрем мястот на неговото дела на учен и педагог.

В тези кратки бележки, без претенции за задълбоченост и широта на с хвата, ще се опитам да очертая контурите на това дело.

Нека ми бъде позволено най-напред да се спра на обстановката във фа култета по времето, когато Тагамлицки завършва математическото си образо вание в 1940 година. По това време обликът на българската математика се дава от тогавашните професори: Димитър Табаков, Кирил Попов, Никола Обре ков, Любомир Чакалов и Иван Ценов. През първата година от своето следван студентите математици слушат лекциите на Димитър Табаков по аналитична геометрия, на Кирил Попов - по диференциално и интегрално смятане и Нико ла Обрешков - по висша алгебра. В мирогледно отношение най-важен през тази първа година е курсът по диференциално и интегрално смятане, защото той е основа, върху която се градят останалите математически дисциплини, които имат отношение към понятието граничен преход, каквито са например диференциалните уравнения, комплексният анализ, аналитичната механика и диференциалната геометрия.

Курсът по диференциално и интегрално смятане на Кирил Попов обхваща традиционния материал по тази дисциплина. По отношение на строгост и яснота на изложението обаче, има какво да се желае. Така например, понятие то за граничен преход се базира на нестрого описаното понятие "променлив величина". Не се излага с необходимата пълнота теория на редиците. От не се дава само едно своеобразно и трудно разбираемо доказателство на теоре мата на Коши за пълнота на множеството от реалните числа. Важните топологични факти, свързани с понятията непрекъснатост и компактност, също не са изложени задоволително. Понятията за лице и обем, които предхождат построяването на определените и кратните интеграли, се считат за известни от средното училище и не се дефинират. В замяна на това, отделя

се достатъчно внимание и даже се акцентира на създаване на геометрични представи. Накратко казано, духът на курса по диференциално и интегрално смятане е, ако можем да се изразим така, физически. Това съответства на мирогледа на професор Попов, който в своите занимания отдава предпочитание на приложенията на математиката. В подкрепа на това твърдение ще отбележим например неговите интереси към астрономията, от която област е и неговата докторска работа, а също и интересите му към външната балистика, теорията на застрахователното дело, а също и към някои математически задачи, породени от физиката и химията.

Ето каква е обстановката в катедрата на Кирил Попов по време на назначението на младия Тагамлицки за специализант, а по-късно и асистент. Може да се каже, че заедно с неговото назначение, в старата катедра по диференциално и интегрално смятане прониква духът на съвременната математика.

Въпреки очевидните различия между възгледите на професора и новоназначения му сътрудник, Кирил Попов му предоставя пълна свобода в избора на научни занимания. Той усеща, че Тагамлицки има достатъчно сили да намери сам своя път в науката, уважава тази негова самостоятелност и следи благосклонно неговото развитие. От своя страна Тагамлицки е признателен за предоставената му свобода. Така, въпреки различията, между професор и асистент се установяват отношения на взаимно уважение, които продължават до самата смърт на Кирил Попов.

Още от самото начало дейността на младия Тагамлицки се развива в две направления. От една страна, непосредствено от назначението за специализант, а след това като докторант в Лайпцигския университет /през учебната 1942/1943 година/ и по-късно като асистент, той развива интензивна научна дейност. От друга страна той обръща голямо внимание на упражненията и в тях се старае да попълни някои от празнините на лекционния курс. Още тук проличава умението му да забелязва добрите студенти и да ги импулсира за работа. Горните две направления в равна степен изпълват цялата му научна и педагогическа дейност. Тук ще кажем по нещо за всяка от тези две страни

на неговото дело.

Говорейки за научната работа на Тагамлицки, може би трябва да пропу нем първите му работи и да започнем с оня цикъл от публикации, в които и личава как постепенно в него се заражда и съзрява понятието за неразложи мост, на което той посвети най-съществената част от своите изследвания.

В първата работа от този цикъл, излязла през 1946 г., той решава един въпрос, свързан със задача, дадена му от проф. Н. Обрешков, с което поставя начало на изследванията си върху неразложимостта. Най-съществен резултат в тази работа се съдържа в следната теорема.

Ако $f(x)$ има производни от произволен ред в интервала $x<a$ и ако за $k=0,1,2,\ldots$ имаме $|f^{(k)}(x)|\leq Ae^{x}$ /при $x<a$ /, то $f(x)=Be^{x}$, където $|B|\leq A$

Тази теорема ясно показва, че експоненциалната функция е в известен смисъл екстремална. Заинтересуван от това обстоятелство, в следващата своя работа /от 1947 г./, той пренася този резултат за числови редици, където ролята на k-тата производна се играе от k-тата крайна разлика на редицата, а ролята на експоненциалната функция - от безкрайната геометрична прогресия с частно $q\in(0,1)$. Изхождайки от тези задачи, Тагамлицки скоро схваща, че те са частни случаи от по-общи задачи и това го довежда постепенно до осъзнаване на ролята на неразложимостта. За първи път той използва това понятие в работата "Изследване на една класа от функции", публикувана в Годишника на университета през 1948 г. В нея, използвайки неразложимите елементи, той доказва следната теорема.

За да може една безбройно много пъти диференцируема функция $f(x)$ да се развие при $x>a$ в абсолютно сходящ дириклетов ред

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_{\nu}e^{-\lambda_{\nu}x},$$

съответстващ на редицата $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\ldots$ /$\lambda_{\mu}\neq\lambda_{\nu}$ за $\mu\neq\nu$ / е необходимо и достатъчно при $x>a$ да съществува функция $g(x)$, притежаваща дириклетово развитие от същия тип с неотрицателни коефициенти

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}B_{\nu}e^{-\lambda_{\nu}x},$$

която удовлетворява неравенствата

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k g^{(k)}(x).$$

В такъв случай $|A_\nu| \leq B_\nu$.

Доказва се и аналогична теорема за представяне с лапласови интеграли

Безспорно най-интересната работа от този кръг е изследването върху абелевия интерполационен ред.

Още в началото на миналия век Абел разглежда следната интерполационна задача. Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ са $n+1$ последователни членове на една аритметична прогресия. Да се намери полином $P(x)$ най-много от n -та степен, за който да са в сила равенствата $P^{(k)}(x_k) = a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при което a_k са дадени числа. Както лесно се вижда, това свойство притежава само полиномът $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \frac{(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}}{k!}$. Естествено е да се запитаме дали подобна формула не е в сила при $n = \infty$; с дуги думи, дали ако е дадена безкрайната аритметична прогресия $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ с първи член $x_0 > a$ и разлика $t = x_{n+1} - x_n > 0$, както и безкрайната редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, може да се намери функция $f(x)$ имаща производни от произволен ред за $x > a$ така, че да е в сила за $x > a$ развитието

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \frac{(x_0 - x)(x_k - x)^{k-1}}{k!}, \quad f^{(k)}(x_k) = a_k .$$

Ясно е, че горната задача не винаги има решение, защото константите a_k може да се изберат така, че редът от дясната страна да не е сходящ. Оказва се обаче, че и да е сходящ, задачата пак може да няма решение. Това означава, че редът може да е сходящ, може да съществува функция $f(x)$, която има производни от произволен ред за $x > a$ и за която $f^{(k)}(x_k) = a_k$, но въпреки това сумата на реда да се различава от $f(x)$. Френският математик Алфен дава достатъчни условия за развитието на функция в абелев ред. На Тагамлицки се удава да намери причината, поради която горната задача не винаги има решение, да обобщи задачата и да намери необходими и достатъчни условия за решение на обобщената задача. Ето неговият подход. Той разглежда пространството R от всички реални функции, дефинирани и притежаващи производни от произволен ред в интервала $x > a$. Нека редицата

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е аритметична прогресия с първи член $x_0 > a$ и разлика $\tau = x_{n+1} - x_n > 0$. В R се въвежда частична наредба по следния начин. За някое $f(x) \in R$ имаме $f(x) \succ 0$, ако са в сила неравенствата $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqq 0$ за $a < x < x_k$ /$k = 0, 1, 2, \ldots$ /. Една функция $f(x) \in R$ е неразложима относно въведената наредба, ако е колинеарна на всеки елемент от R, който я минорира, т.е. ако от $\varphi(x) \in R$ и $0 \prec \varphi(x) \prec f(x)$ следва, че $\varphi(x) = \lambda f(x)$. Най същественото тук е, че Тагамлицки намира всички неразложими елементи относно тази наредба. Оказва се, че освен абелевите полиноми $P_k(x) = c(x-x_0)(x-x_k)^{k-1}$ /$k = 0, 1, 2, \ldots$, $c > 0$ / има още неразложими вектори. Именно, ако $\tau\lambda$ и $\tau\mu$ са положителните корени на уравнението $ye^{1-y} = t$ / $0 < t < 1$ /, то функцията

$$R(x,t) = \frac{e^{\lambda(x_0-x)} - e^{\mu(x_0-x)}}{\lambda - \mu}$$

е неразложим елемент. Освен това неразложим елемент е и функцията $R(x,1) = (x_0-x)e^{(x_0-x)\tau}$. При тези условия той доказва следната теорема.

<u>Теорема</u>. За да може една безбройно много пъти диференцируема функция $f(x)$ /при $x > a$ / да се представи във вида

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0-x)(x_\nu-x)^{\nu-1}}{\nu!} + \int_0^1 R(x,t)\,d\Theta(t),$$

където интегралът

$$\int_0^1 R(x,t)\,d\Theta(t)$$

е абсолютно сходящ, а редът

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{(x_0-x)(x_\nu-x_0)^{\nu-1}}{\nu!}$$

е сходящ поне при една стойност на x различна от x_0 /следователно сходящ навсякъде/, необходимо и достатъчно е $f(x)$ и константата 0 да притежават обща мажоранта относно нареждането в R. Горното представяне е единствено, ако функцията $\Theta(t)$ е нормирана.

След този завършен резултат /ще споменем, че той е удостоен с Димитровска награда/, Тагамлицки насочва усилията си за усъвършенстване на метода и намиране на нови приложения. Така, в 1953 г. той публикува една обща теорема, позната под името "теорема за конусите". Тя гласи /грубо

казано/, че ако L и K са два конуса, които удовлетворяват някои условия които не ще изброяваме и ако L съдържа неразложимите елементи на K, т L съдържа и целия конус K. Заедно с това, той дава и редица приложени на тази теорема, като теоремите на Хаусдорф за моментите /позитивен и не позитивен случай/, теорема на Уидер, теорема на Бернщайн за интегрално представяне на регулярно монотонните функции.

В следващата учебна 1954/1955 година Тагамлицки прочете един лекционен курс по обобщени функции, в които изложи свои изследвания в тази област, съществената част от които беше приложение на теоремата за конусит Резултатите бяха публикувани в една поредица от три работи, а един друг вариант беше публикуван в една съвместна работа с Д. Дойчинов. По време тези изследвания съвпаднаха с периода на най-голям възход на кръжока при катедрата по диференциално и интегрално смятане, за който ще кажем няколко думи.

Този кръжок беше основан в самото начало на петдесетте години. По това време връзките на нашата математика с външния свят бяха практически прекъснати. Никой, бил той студент или завършил математика, не можеше да мечтае за следване или специализация в някой европейски университет, а още по-малко - отвъд океана. В онова време хората от моето поколение познаваха само нашия университет и се срещаха с науката само чрез тогавашните ни преподаватели /професори, доценти и асистенти/. На този фон най-силно изпъкваше фигурата на Ярослав Тагамлицки. Неговият ентусиазъм, желанието му да работи с младите, да ги въведе в областта, в която той работеше интензивно, не можеше да остави равнодушни добрите студенти и млади асистенти. И скоро в неговия кръжок се създаде, бих казал, неповторима атмосфера, в която всички участници се стремяха, според възможностите си да проявят максимална активност в решаване на възникващите задачи. Тази именно атмосфера предопредели по-нататъшния път на много от участниците в кръжока.

Разбира се по-късно нещата се измениха. Младите хора получиха несравнимо по-големи възможности за научно развитие чрез следване, специализа-

ция или участие в работата на реномирани /предимно руски/ чужди университети и научни центрове. Кръжокът на Тагамлицки не беше вече единственият път, който начинающият трябваще да измине за да навлезе в науката. Това естествено доведе до отлив на студентите от кръжока. До края на живота с обаче Тагамлицки не жалеше сили и считаше за свое първостепенно задължение работата със студентите - кръжочници.

През 1957 година на Тагамлицки стана известно, че неговата теорема за конусите е частен случай от теоремата на Крейн - Милман. Това обстоятелство послужи като тласък към нови изследвания в тази област. На първо място Тагамлицки се заинтересува от това, дали понятието изпъкналост и неразложимост не могат да се обобщят и за нелинейни пространства. В резултат, в края на петдесетте и началото на шестдесетте години той обобщи понятието изпъкналост и /при подходяща естествена дефиниция на полупространство/ намери условия, при които за всеки две непресичащи се непразни изпъкнали множества съществува полупространство, съдържащо само едното от тях. По-нататъшните изследвания го доведоха до обобщение на понятието неразложимост за нелинейни топологични пространства. Именно, той доказа една теорема /така наречената теорема за топологична индукция/, която, подобно на теоремата на Крейн - Милман дава възможност да заключим, че едно множество съдържа друго множество, ако съдържа неразложимите му елементи. От тази теорема следва /в случай на линейно пространство/ теоремата на Крейн - Милман.

Малко по-късно вниманието на Тагамлицки беше привлечено от т.н. диагонален принцип. Още през шестдесетте години той забеляза, че теоремата на Тихонов може да се използва за извършване на диагонален процес. Изследванията в тази насока продължиха и в резултат Тагамлицки достигна до един обобщение, което се формулира просто и което не използва даже понятието топология. Както и при топологичната индукция, аз няма да давам точна формулировка на диагоналния принцип, защото тя е позната на всички нас.

В последните години вниманието на Тагамлицки беше привлечено от теорията на многообразията. Той работеше по изграждането на един вариант на

на тази теория с подчертано аналитичен характер. В тази област обаче той не публикува нищо. Най-вероятната причина за това е, че не смяташе изследванията си за достатъчно завършени.

Когато ставаше дума за кръжока на Тагамлицки беше споменато, че той считаше за първостепенно свое задължение работата с младите. Това се отнася в същност за цялата му дейност като педагог. За тази дейност не се налага да говоря много пред настоящата аудитория, защото всички ние я познаваме. Ние познаваме отличните лекции на Тагамлицки по диференциално и интегрално смятане, които никога не се превърнаха в рутинен курс, а всяка година претърпяваха изменения, показващи характерния за Тагамлицки стремеж към обновление. Познаваме неговия съдържателен и добре премислен учебник, първият издържан в научно отношение учебник по тази дисциплина у нас. За педагогическото майсторство на неговия автор говорят, освен всичко друго подбраните с много вкус оригинални задачи. Ние помним дългогодишните лекции по функционален анализ, в които той ежегодно излагаше въпроси, свързани с неговите интереси и изследвания. Свидетели сме на това, как много години наред той носеше без видимо усилие тежката си 10 часова нагрузка. Нещо повече, знаем как на всеки намек за нейното намаляване той гледаше едва ли не като на посегателство към неговата личност. По всичко изглежда, че тази постоянна, ежедневна лекционна заетост беше неотменима част от неговия живот.

Цялостната дейност на Тагамлицки получи обществено признание. Той беше избран за член - кореспондент на Българската академия на науките, беше награден с ордени "Кирил и Методи" I и II степен, беше удостоен със званието "Заслужил деятел на науката". Без риск да сгрешим обаче можем да кажем, че делото на Тагамлицки не само напълно заслужи, но и надхвърли изразите на това обществено признание. Но за един учен, който подобно на Тагамлицки живее с и за своята наука, тези изрази не са от първостепенно значение. Много по-важно е каква следа оставя той след себе си чрез своето научно наследство и чрез въздействието , оказано върху неговите приемници. А в това отношение Ярослав Тагамлицки наистина остави ярка следа.