ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математически факултет

ГЕОМЕТРИИ И ВРЪЗКИ МЕЖДУ ТѢХЪ

(Встѫпителна лекция, четена на 28. X. 1941 г.)

Отъ Б. Петканчинъ

Да се говори върху въпроси изъ математиката предъ единъ разнороденъ крѫгъ отъ слушатели е задача не лека и сложна. Мѫченъ е най-вече изборътъ на темата, която ще се развива. Излагането на съвременни проблеми отъ върховетѣ на науката ще намѣри одобрението на познавача, но за любителя или оня, който тепърва ще прониква въ огромния складъ отъ знания, натрупани презъ вѣковетѣ въ математиката, то ще изглежда само като една редица отъ думи или — още по-лошо — отъ символи и формули, задъ който не стои нищо. Единъ елементаренъ въпросъ ще бѫде отъ интересъ за слушателя отъ втората категория, но ще предизвика скука у осведомения. Обикновениятъ изходъ е: избира се тема, засѣгаща отчасти математиката, отчасти науки, които се допиратъ или донѣкѫде покриватъ съ нея. Описва се историческиятъ развой на клонъ отъ математиката; излагатъ се въпроси, свързани съ философията; прибѣгва се къмъ природнитѣ науки и тамъ се търсятъ приложения на математиката. Не напразно, обаче, математиката още отъ древностьта — и така ще бѫде и въ бѫдаще — се слави съ своята простота и строгость. Защо ще трѣбва да се изоставятъ тия нейни качества и да се отива въ други области на науката, като по тоя начинъ къмъ чисто математическитѣ трудности въ изложенитѣ въпроси се прибавятъ неяснотитѣ или спорнитѣ нѣща отъ съседнитѣ области? Смѣтамъ, че единъ математикъ трѣбва да има желанието дори предъ една аудитория отъ неспециалисти да покаже достоинствата на своята наука чрезъ доводи, взети отъ самата нея. Нима слушателитѣ иначе ще трѣбва да останатъ съ впечатлението, че математиката е само една, наистина твърде полезна, но все пакъ прибавка къмъ други науки, които единствено иматъ право на сѫществуване.

Темата, която ще изложа предъ васъ, се отнася до проблеми **само** изъ математиката. Обширностьта ѝ личи и за несведущия отъ нейното название: „**Геометрии и връзки между тѣхъ**“. Малкото време, съ което разполагамъ, ще ме принуждава да бѫда на много мѣста по-кратъкъ, отколкото бихъ желалъ; съ изразитѣ „може да се докаже“, „установено е“, „ясно е, че...“ ще апелирамъ често за вѣрване въ нѣща, въ които не съмъ ви убедилъ. Затова още отъ сега искамъ прошка отъ слушателитѣ за ония части отъ изложението, които ще имъ останатъ тъмни. Ще се старая поне да не правя яснитѣ нѣща тъмни чрезъ прекалено използуване на специалния жаргонъ, който и математиката, както всѣка друга наука, си е създала.

1. Основи на една геометрия

Ще почна съ познатата ни отъ срѣдното училище геометрия — така наречената Евклидова геометрия. Въ нея, както и въ всѣки клонъ на математиката, боравимъ съ известни понятия, за които се изказватъ твърдения — геометрични предложения. Едни отъ понятията сѫ обекти, ако щете предмети: точка, права, разстояние, окрѫжность. Други сѫ релации, съотношения между обектитѣ: една точка е „между" две други точки, точка „лежи" въ равнина, два ѫгла сѫ „равни", една отсѣчка е „по-малка" отъ друга, две прави сѫ „перпендикулярни"; всѣка релация е свързана съ единъ или повече обекти. Въ предложенията обикновено се излиза отъ „дадени" обекти и релации между тѣхъ и се твърди сѫществуването на други обекти, съ нѣкакви релации между тѣхъ или съ даденитѣ обекти.

Геометрията — и така е съ всѣка математична дисциплина — се излага въ известенъ редъ, като последователно се въвеждатъ все нови понятия и предложения. При това, стараемъ се за всѣко ново понятие да дадемъ дефиниция, въ която се срѣщатъ само дефинирани до тоя моментъ понятия; за всѣко ново твърдение, за да го признаемъ за вѣрно, търсимъ доказателство, което да използува само установенитѣ вече за вѣрни твърдения; въ задоволяването на тия изисквания се проявява логичната строгость на геометрията. Така геометрията върви напредъ и вѣроятно тоя процесъ нѣма край. Ако тръгнемъ, обаче, отъ известно понятие назадъ, ясно е, че ще стигнемъ до поне едно понятие, което не може да се дефинира съ предхождащи; такова е напримѣръ сигурно първото, понеже то нѣма предхождащи. Сѫщо така въ началото ще имаме известни твърдения, истинностьта на които трѣбва да допустнемъ безъ доказателство. И тъй, геометрията — за сега знаемъ само една: Евклидовата — трѣбва да приеме известни основни понятия безъ дефиниция и известни предложения, аксиоми, безъ доказателство. Не се спирамъ на въпроса, доколко обстоятелства отъ нематематично естество влияятъ или трѣбва да влияятъ при избора на основитѣ на геометрията. Тукъ могатъ да се намѣсятъ философски, исторически, психологически, дори естетически съображения. За насъ е важно само, че основнитѣ понятия и аксиомитѣ трѣбва да сѫществуватъ, за да градимъ нататъкъ; всичко останало — което е било и продължава да бѫде предметъ на спорове, защото несъмнено е сжщо важно — оставяме настрана. Необходимостьта отъ подобни основи на геометрията е била ясно осъзната още отъ елинския геометъръ *Евклидъ* отъ Александрия (3. в. пр. Хр.) и безсмъртното му съчинение „Елементи“ съдържа опитъ за поставяне на тия основи. Работата върху обосноваването на Евклидовата геометрия продължава, почти безъ прекжсване, надъ две хилядолѣтия и едва къмъ края на 19. вѣкъ достига относителенъ завършекъ. Единъ, станалъ вече класиченъ, сводъ на голѣма часть отъ постигнатитѣ резултати е съчинението „Grundlagen der Geometrie“ на германския математикъ *Давидъ Хилбертъ* (1861 — още живъ).

2. Евклидова геометрия

Споредъ системата на Хилбертъ — тя, впрочемъ, отъ различни автори се излага въ несжществено различни форми — Евклидовата геометрия се изгражда върху осемь основни понятия и двадесетина аксиоми. Три отъ основнитѣ понятия сж обекти: точка, права, равнина; останалитѣ сж релации: точка лежи на права, точка лежи въ равнина, точка е между две точки, една отсѣчка е равна на друга, единъ жгълъ (между две пресѣкателни прави) е равенъ на другъ. Аксиомитѣ се раздѣлятъ на петь групи. Първата група, аксиоми на свързването, се занимава съ опредѣлянето на елементи чрезъ други елементи. Ето една отъ тѣхъ: Сжществува, и то само една, права, която минава презъ две различни точки. Въ втората група, аксиоми на наредбата, се декретиратъ свойства на понятието „между“. Ето една отъ тѣзи аксиоми: Ако A, B, C сж три различни точки върху една права, въ сила е точно една отъ следнитѣ три релации: A е между B и C, или B е между C и A, или C е между A и B. Само отъ тия две групи аксиоми следватъ вече извънредно много факти; впрочемъ, тѣ обикновено слабо се застжпватъ въ школската геометрия. Въ третата група, аксиоми за еднаквостьта, се излагатъ свойства на понятията „равенство на две отсѣчки“ и „равенство на два жгла“ и отъ тѣхъ следва учението за еднаквостьта, сходството на фигуритѣ. Четвъртата група съдържа само аксиомата за успоредностьта: презъ точка, нележаща на дадена права, минава най-много една права, непресичаща първата, но лежаща въ една равнина съ нея. Че има поне една успоредна, следва само отъ първитѣ три групи аксиоми. И петата група има само една аксиома — за непрекжснатостьта. Съдържанието ѝ може да се изкаже приблизително тъй: ако точкитѣ на една права сж раздѣлени въ две съвокупности, така че всѣка точка отъ едната съвокупность е влѣво отъ всѣка точка на другата, има върху правата една дѣляща точка, като всѣка точка влѣво отъ нея е отъ първата, а всѣка точка вдѣсно отъ нея — отъ втората съвокупность. Сега дефинираме: математичната дисциплина, която може да се изгради върху изложенитѣ основни понятия и аксиоми, наричаме Евклидова геометрия.

3. Трансформации

Въ тая геометрия срѣщаме много нѣща, които сж отъ голѣмо значение и за други геометрии. Да почнемъ съ единъ малко пренебрегванъ, поне напоследъкъ, клонъ отъ нея: съ дескриптивната геометрия, породена отъ изисквания на художника и техника. Въ нея се даватъ методи, чрезъ които пространственитѣ фигури се изобразяватъ върху равнина — чертожния листъ. Избираме единъ примѣръ за такъвъ методъ — не най-простия, но принципално важенъ и нуженъ за по-нататъшното изложение. Нека α и α' сж две равнини, отъ които втората смѣтаме като чертожна; S е точка вънъ отъ тѣхъ. Ако X е произволна точка отъ α, неинъ образъ въ α' наричаме точката X', въ която правата SX пресича α'. Така дефинираното изображение на точкитѣ отъ α чрезъ точки отъ α', което наричаме (централна) проекция на α върху α' отъ центъръ S, има и своитѣ недостатъци: 1. Не всѣка точка отъ α има образъ. Именно ако X лежи върху правата a, въ която α се сѣче отъ равнината β' презъ S и успоредна на α', правата SX е успоредна на α' и X' изчезва. 2. Обратно, има точки отъ α', които не сж образи на точки отъ α, които нѣматъ оригинали въ α; това сж точкитѣ отъ правата a', въ която α' се сѣче отъ равнината β презъ S и успоредна на α. Чрезъ описаната централна проекция, разбира се, на всѣка фигура отъ α, ако я разглеждаме като съвокупность отъ точки, може да се намѣри като образъ една фигура въ α', именно опредѣлената отъ образитѣ на всички точки отъ първата фигура. Какъ се изправятъ слабитѣ страни на описаното изображение, ще кажемъ нататъкъ. Важенъ за насъ сега е тоя начинъ за съпоставяне, съответствие, между точкитѣ отъ α и тия отъ α'.

Такива съответствия се срѣщатъ на всѣка крачка въ математиката и представятъ едно обобщение на понятието функция. Понеже ще ни трѣбватъ, ще се спремъ накратко върху тѣхъ. Нека имаме една съвокупность M отъ какви да е елементи (да си мислимъ напр., че M се състои отъ точкитѣ на α, нележащи на a); M' е втора съвокупность отъ какви да е елементи, като дори може да съвпада съ M (въ нашия примѣръ нека M' се състои отъ точкитѣ на α', които не лежатъ на a'). Да предположимъ, че е дадено нѣкакво правило, споредъ което на всѣки елементъ X отъ M наричаме съответенъ или оставяме да отговаря въ M' единъ точно опредѣленъ елементъ X'. Казваме, че това правило ни опредѣля (еднозначно) съответствие, изображение, трансформация на M въ M'; ако всѣки елементъ на M' е образъ на поне единъ елементъ отъ M, имаме изображение на M върху M'. Въ нашия примѣръ имаме дори 1,1-значно или обратимо еднозначно изображение. Подъ това разбираме, че всѣки елементъ отъ M' е образъ на само единъ елементъ отъ M или, все едно, че образитѣ на два различни елемента отъ M сѫ сѫщо различни въ M'. Съ всѣко 1,1-значно изображение φ на M върху M' е свързано и едно друго 1,1-значно ивображение на M' върху M, което наричаме обратно на φ и означаваме съ φ^{-1}. Именно, ако на произволенъ елементъ X' отъ M' наречемъ съответенъ въ M оня единственъ елементъ X, чийто образъ чрезъ φ се явява X', опредѣля се така едно 1,1-значно съответствие на M' върху M и за него става дума. Въ нашия примѣръ, ако φ е изображението на α безъ a върху α' безъ a', получено съ описаната централна проекция, обратното φ^{-1} ще бѫде изображението на образитѣ отъ α' безъ a' върху оригиналитѣ имъ въ α безъ a. Отъ сега нататъкъ въобще ще имаме работа съ 1,1-значни изображения и затова обикновено ще изпускаме думата „1,1-значно“.

Нека φ е съответствие на M върху M', а φ' е съответствие на M' върху съвокупность M''. Чрезъ φ на произволенъ елементъ X отъ M отговаря елементъ X' отъ M', а на последния чрезъ φ' отговаря елементъ X'' отъ M''. Ако се условимъ на X отъ M да наречемъ съответенъ въ M'' направо елемента X'', съ това правило дефинираме една трансформация на M върху M'', която е сѫщо 1,1-значна; наричаме я произведение $\varphi . \varphi'$ (най-напредъ φ, после φ', това е сѫществено). Ясно е, че така можемъ да дефинираме произведение $\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_k$ и на повече трансформации.

4. Аналитична геометрия

Следъ тия малко сухи дефиниции да промѣнимъ предмета, за освежаване на вниманието, а по-късно ще се върнемъ къмъ тѣхъ. Знаемъ отъ школската геометрия, че въ нея твърде рано се намѣсва числото и така се отваря възможность за използуване на алгебрата и анализа въ геометрията. Това става, като се въвеждатъ начини за измѣрване на известни геометрични величини чрезъ единици отъ сѫщитѣ величини; като резултатъ се явява тъй нареченото мѣрно число на величината при тая единица и съ него работимъ нататъкъ. Въ това сумарно обяснение има неясни понятия: величина, измѣрване и, логично погледнато, никакъ не допринасятъ за тѣхното уясняване аналогии съ факти отъ физичното пространство. Безъ да бѫдемъ много точни и подробни, можемъ да кажемъ: една съвокупность отъ геометрични обекти е съвокупность отъ величини, ако по геометриченъ начинъ, основанъ на аксиомитѣ, може да се дефиниратъ за всѣки два обекта понятията „равно“, „по-малко“, „сборъ“ и „разлика“ и за тия понятия сѫ въ сила законитѣ, които важатъ за аналогичнитѣ понятия при реалнитѣ числа. Напримѣръ съвокупностьта отъ всички отсѣчки представя една категория величини; сѫщото е за ѫглитѣ, лицата на многоѫгълницитѣ и т. н. Като се основаваме на даденитѣ геометрични дефиниции за равно, по-малко, сборъ и разлика, при отсѣчкитѣ напримѣръ, можемъ да установимъ, и то по единственъ начинъ, еднозначно съответствие на съвокупностьта отъ всички отсѣчки върху съвокупностьта на всички реални положителни числа и то така, че 1. на една избрана отсѣчка e да отговаря числото 1 и 2. отъ всѣка релация между отсѣчки, изразена съ $=$, $<$, $+$, $-$, да следва сѫщата релация между тѣхнитѣ съответни числа. Ето това отговаряще на една отсѣчка реално положително число чрезъ описаното единствено изображение съ казанитѣ свойства ще бѫде **мѣрното число на отсѣчката** при избраната **единица** e. Несъмнено, при установяването на въпросното съответствие ще се използуватъ и свойствата на реалнитѣ числа; отъ геометричнитѣ аксиоми особено важна роля играе тая за непрекѫснатостьта. Вижда се, че всѣко мѣрно число е свързано съ известенъ обектъ: отсѣчка, ѫгълъ, лице и пр.

Систематичното използуване на числото за нуждитѣ на геометрията става съ помощьта на **аналитичната геометрия**, като се въвеждатъ **координати** най-напредъ за точкитѣ, а после и за други геометрични обекти. Поне за точкитѣ това можемъ да предполагаме за известно. Въ равнината напр. имаме две перпендикулярни прави, съ избрани положителни посоки върху тѣхъ — това сѫ **координатнитѣ оси** Ox, Oy. Координатитѣ на произволна точка P отъ равнината сѫ мѣрнитѣ числа, при една и сѫща единица, на отсѣчкитѣ OP_1, OP_2, като предъ тия числа е взетъ знакъ $+$ или $-$, споредъ това дали съответната отсѣчка има положителна или отрицателна посока; P_1 и P_2 сѫ петитѣ на перпендикуляритѣ, прекарани къмъ Ox и Oy презъ P. Въ една равнина имаме два вида **координатни системи: прави и обратни**; при първитѣ положителната часть на Oy е влѣво отъ положителната часть на Ox, при вторитѣ — вдѣсно. Сѫщо различно ориентирани могатъ да бѫдатъ координатнитѣ системи и въ пространството. Въ равнината всѣка точка има една двойка координати x, y и обратно всѣка двойка реални числа е двойка координати на точно една точка. При всѣка координатна система имаме, значи, 1, 1-значно съответствие на съвокупностьта отъ всички точки въ равнината върху съвокупностьта отъ всички наредени двойки (x, y) отъ реални числа. Двойката я наричаме **наредена**, защото правимъ разлика между напр. (2, 1) и (1, 2); а трѣбва да правимъ разлика, защото точкитѣ съ тия координати сж очевидно различни. За пространството имаме наредени тройки (x, y, z).

Аналитичната геометрия ще ни покаже сега пжтя, за да намѣримъ отговора на единъ важенъ въпросъ. Евклидовата геометрия дефинирахме като логична система, построена върху известни основни понятия и аксиоми. Кой ни гарантира, обаче, че тая математична дисциплина е непротиворечива? Не може ли да се случи две следствия отъ нашитѣ аксиоми да сж несъвмѣстими едно съ друго? Отговорътъ е само относителенъ и, може би, малко изненадващъ: ако въ учението за реалнитѣ числа нѣма противоречия, нѣма такива и въ Евклидовата геометрия. Една бележка: и учението за реалнитѣ числа може да се построи съ известни основни понятия и аксиоми, които въ края на краищата се отнасятъ до естественитѣ числа 1, 2, 3, ...; изследванията за непротиворечивостьта на това учение не сж още окончателно завършени. Ние въ геометрията, обаче, приемаме, че теорията на естественитѣ, а съ нея и тая на реалнитѣ, числа е безъ противоречие.

5. Моделъ на една геометрия въ друга

Предварително ще изтъкнемъ нѣкои по-общи разсжждения, които и иначе ще ни сж полезни. Нека S' е една математична дисциплина и знаемъ, че тя е безъ противоречия, а S е друга математична дисциплина, изградена върху основнитѣ понятия-обекти $B_1, B_2, \ldots, B_p$ и основнитѣ понятия-релации $R_1, R_2, \ldots, R_q$ съ аксиоми $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Да предположимъ, че въ S' можемъ да намѣримъ понятия-обекти $B_1', \ldots, B_p'$ и понятия-релации $R_1', \ldots, R_q'$ (не непремѣнно основни за S'), подчинени на изисквания, които ще изброимъ по-долу. Въ S всѣко понятие се дефинира чрезъ $B_1, \ldots, R_q$, така, че неговото опредѣление е изказано само съ $B_1, \ldots, R_q$; ако навсѣкжде въ това опредѣлеиие замѣстимъ $B_1, \ldots, R_q$ съответно съ $B_1', \ldots, R_q'$, ще добиемъ дефиниция на едно понятие отъ S'. Така получихме единъ речникъ, чрезъ който на всѣко понятие B отъ S отговаря едно понятие B' отъ S'. Да замѣнимъ сега въ една аксиома A на S навсѣкжде понятията отъ S съ съответнитѣ имъ по описания начинъ понятия отъ S'; получаваме едно твърдение за понятия въ S', т. е. едно предложение отъ S'. Изискваме тогава: всички получени по тоя начинъ отъ аксиомитѣ на S предложения на S' да бждатъ истинни въ S'. Накратко казано: приемаме, че сме намѣрили въ S' една съвокупность отъ понятия $B_1', \ldots, R_q'$, които реализиратъ аксиомитѣ на S. Нека сега вземемъ една теорема T отъ S, отнасяща се до известни понятия отъ S. Ако навсѣкжде замѣнимъ последнитѣ съ съответнитѣ имъ отъ S', ще получимъ предложение T' отъ S'. Доказателството на T въ S е една редица отъ разсѫждения, които въ началото почватъ отъ аксиомитѣ на S. Ако въ тая редица извършимъ описаната смѣна, въ началото ѝ ще получимъ предложенията $A_1', \ldots, A_r'$, за които приехме, че сѫ истинни въ S', а въ края — предложението T'; ясно е, че T' ще бѫде истинна теорема отъ S', защото въ тия две съпоставени редици отъ разсѫждения излизаме отъ истинни предпоставки (въ съответнитѣ дисциплини) и прилагаме едни и сѫщи логични закони. Тогава: ако за S можемъ да намѣримъ едно такова реализиране въ непротиворечивата система S', и S е безъ противоречия. Защото, ако S съдържа две предложения P и Q, които си противоречатъ, ще сѫ въ противоречие и съответнитѣ имъ предложения P' и Q' въ S'; а това е невъзможно, понеже въ S' нѣма противоречия.

Нека сега S е Евклидовата геометрия, а S' — учението за реалнитѣ числа. Постановяваме: на понятието точка отъ S ще отговаря понятието наредена тройка реални числа отъ S'. За простота ще казваме: нова точка е всѣка наредена тройка (x, y, z) отъ реални числа. Нова равнина въ S' е всѣка съвокупность отъ нови точки, чиито координати x, y, z удовлетворяватъ едно уравнение отъ вида $ax+by+cz+d=0$, като a, b, c, d сѫ реални числа и отъ a, b, c поне едно не е нула. Нова права ще бѫде съвокупность отъ новитѣ точки на две нови равнини, които иматъ поне една обща нова точка. Една нова точка ще лежи въ една нова права или нова равнина, когато имъ принадлежи (нали последнитѣ сѫ съвокупности отъ нови точки). По аналогиченъ начинъ геометричнитѣ релации „между", „равенство" на отсѣчки и ѫгли замѣняме съ известни аналитични релации между новитѣ елементи. Така на всѣко основно понятие отъ S постановихме да отговаря едно понятие отъ S'; изработихме си речника. Да се разбере разликата между аналитичната геометрия и това, което правимъ сега. Въ първата на геометричнитѣ обекти, напр. точкитѣ, намѣрихме по геометриченъ начинъ съответни системи реални числа, тѣхнитѣ координати. Сега ние по наше желание решаваме известни аналитически обекти и релации да наричаме съ имената „точка", „между" и пр. Откѫде сме се сѣтили да удостоимъ точно тия обекти съ познатитѣ ни отъ геометрията имена е ясно: пѫтеводитель ни е аналитичната геометрия, но следъ като тя ни заведе, кѫдето ни е необходимо, трѣбва да я забравимъ.

За новитѣ понятия трѣбва да се провѣри валидностьта въ S' на геометричнитѣ аксиоми; тая, повече изчислителна — тя се отнася до аналитически обекти —, работа може да се извърши и да се установи, че наистина аксиомитѣ се реализиратъ въ S'. Тогава следва: въ Евклидовата геометрия нѣма противоречия.

Направенитѣ разсѫждения даватъ и други, извънредно важни не само за математиката, резултати. Фактътъ, че за една геометрия можемъ да намѣримъ въ други клонове на математиката обекти и релации, които я осѫществяватъ, показва, че тая геометрия не е свързана, поне отъ логична гледна точка, съ нѣкакви конкретни представи за нейнитѣ понятия. Наистина, въ физическия свѣтъ има предмети, които съ голѣмо приближение осѫществяватъ Евклидовата геометрия, но тѣ не сѫ единственитѣ. Бихме могли да кажемъ, нагледъ стигайки до парадоксъ: не е важно съдържанието на понятията, а само връзкитѣ, които сме имъ предписали съ аксиомитѣ. Значението на резултатитѣ, за които говоримъ, е голѣмо не само за математиката, но и за философията и логиката; вѣрни на решението да не навлизаме въ чужди области, спираме до тукъ.

6. Еднаквости въ Евклидовата геометрия

Ще се занимаемъ най-после съ още единъ важенъ фактъ отъ Евклидовата геометрия. Въ физичното пространство тѣлата могатъ да се движатъ, безъ да измѣнятъ размѣритѣ и формата си. Когато имаме движение на едно тѣло, всѣка точка на последното се мѣсти въ ново положение, но за точкитѣ, които не лежатъ на тѣлото, движението не означава нищо. Бихме могли, обаче, да си мислимъ всѣка точка отъ пространството твърдо свързана съ точкитѣ на тѣлото и тогава съ движението всѣка точка ще се пренася въ ново положение. Отъ тая гледна точка едно премѣстване, дължимо на движение, не е нищо друго, освенъ 1, 1-значна трансформация на пространството само върху себе си, като при нея разстоянията между точкитѣ оставатъ неизмѣнни. Ето тоя фактъ може да се постави въ основата на чисто геометричното учение за движенията или по-общо на това, което наричаме еднаквость.

Може да се докаже следното: сѫществуватъ 1, 1-значни трансформации на пространството само върху себе си, при които разстоянието между кои да е две точки е равно на разстоянието между трансформиранитѣ имъ; всѣка такава трансформация се нарича е д н а к в о с т ь. Сѫщо такива трансформации има въ една равнина и за простота ще говоримъ за тѣхъ. Всѣка еднаквость може да се получи по следния начинъ. Да вземемъ въ равнината две правоѫгълни координатни системи K и K'. Ако M е произволна точка и x, y сѫ координатитѣ ѝ относно K, да наречемъ нейна съответна точката M', която относно K' има сѫщитѣ координати x, y. Така се опредѣля 1, 1-значна трансформация на равнината сама върху себе си и при нея разстоянията се запазватъ, поради равенството на координатитѣ, макаръ и спрямо разни системи; тая трансформация е, следователно, еднаквость. Понеже, запазвайки постоянна K, можемъ по безбройно много начини да измѣняме K' и при всѣки изборъ на K' да получаваме по една еднаквость, имаме въ равнината безбройно много еднаквости. Ако K и K' сж едновременно прави или обратни системи, еднаквостьта се нарича движение; наистина тя отговаря на физичната ни представа за движение: чрезъ премѣстването, което покрива K върху K', всѣка точка M отива въ съответната си M'. Частни случаи отъ движение сж въртенето на цѣлата равнина около точка на нѣкакъвъ жгълъ и успоредното премѣстване на цѣлата равнина въ една посока на опредѣлена величина. Ако K и K' сж нееднакво ориентирани, еднаквостьта се нарича обръщане; такова е напр. правожгълната симетрия относно една права и въобще всѣко обръщане може да се представи като произведение на движение и такава симетрия.

Еднаквоститѣ иматъ едно важно качество, което именно ги прави ценни за геометрията: чрезъ всѣка еднаквость единъ обектъ, който може да се дефинира съ помощьта на основнитѣ понятия, се трансформира въ обектъ отъ сжщия видъ, всѣка релация, свързана съ известни обекти, преминава въ сжщата релация за съответнитѣ обекти. Това качество не е тривиално. Да веземемъ напримѣръ описаната по-рано проекция на една равнина α върху друга α', която сжщо е трансформация на α върху α'. Ако въ α имаме една окржжность, нейната проекция въ α' въобще не ще бжде окржжность, а елипса, или парабола, или хипербола; видътъ на обекта се мѣни. Съ еднаквоститѣ работата е, както казахме, по-проста и по-безопасна; всичко, абсолютно всичко, се запазва. Може да се докаже, че чрезъ еднаквость права се преобразува въ права, равнина — въ равнина; сжщо така, ако точка лежи върху права или равнина, съответната точка лежи върху съответната права или равнина. По-нататъкъ: ако точка B лежи между A и C, съответната B' следъ еднаквостьта е сжщо между A' и C'. Че равенството на отсѣчки се запазва, е ясно отъ самата дефиниция на еднаквость и, най-после, запазва се и равенството на два жгла. Можемъ да резюмириме достатъчно ясно: чрезъ еднаквость всѣки обектъ-основно понятие преминава въ обектъ отъ сжщия видъ, всѣка отъ основнитѣ релации — въ релация отъ сжщия видъ. Понеже всѣки другъ обектъ или друга релация се дефиниратъ съ запазващитѣ се основни, следва онова свойство на еднаквоститѣ, което изказахме преди.

Казахме, че еднаквоститѣ въ една равнина сж безбройно много. Тѣхната съвокупность B има важни свойства, които трѣбва да изтъкнемъ. Ако φ е еднаквость, запазва разстоянията; тогава и обратната ѝ φ^{-1} ще ги запазва, следователно, ще бжде еднаквость. Подобно се намира, че и произведението на две еднаквости е пакъ еднаквость; по-точно, то е движение, ако и двѣтѣ еднаквости сж движения или обръщания, а е обръщане, ако едната е движение, другата — обръщане. Поради изброенитѣ свойства казваме, че B е група отъ трансформации. Когато имаме въобще една съвокупность G отъ 1, 1-значни трансформации на една съвокупность M сама върху себе си, G наричаме група, ако има следнитѣ свойства: 1. Трансформацията, обратна на една трансформация отъ G, също принадлежи на G; 2. Произведението на две трансформации отъ G също е отъ G.

Ние видѣхме, че всѣки обектъ, който може да се дефинира съ помощьта на основнитѣ понятия, се запазва следъ еднаквость, т. е. първоначалниятъ и трансформираниятъ обектъ сж отъ единъ и сжщъ видъ, сж еднакви. Бихме могли да кажемъ, че това е единъ и сжщъ обектъ, но на разни мѣста. Можемъ най-сетне двата обекта да наречемъ еквивалентни по отношение на групата на еднаквоститѣ и тая еквивалентность има всички ония качества, които дори въ обикновения животъ бихме изисквали отъ една еквивалентность: I. Всѣки обектъ е еквивалентенъ на себе си; II. Ако обектътъ P е еквивалентенъ на Q, то и Q е еквивалентенъ на P; III. Ако P е еквивалентенъ на Q, а последниятъ — на R, то и P е еквивалентенъ на R.

7. Геометрии на Klein

Следъ всички дадени обяснения естествено е да се направи една крачка напредъ: отъ групата на еднаквоститѣ къмъ произволна група трансформации; въ сжщность тая крачка е направена късно въ геометрията — въ всѣка наука има инерция и до най-проститѣ нѣща се идва най-трудно — едва въ 1872 г. съ прочутата Ерлангенска програма на голѣмия нѣмски математикъ *Феликсъ Клайнъ* (1849—1925): Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.

Нека сме все още въ Евклидовата равнина. По геометриченъ начинъ лесно можемъ да построимъ и други трансформации на равнината сама върху себе си, отлични отъ еднаквоститѣ. Ето единъ примѣръ: да изберемъ една точка O и на произволна точка P да наречемъ съответна точката P', която лежи на правата OP и то така, че O не е между P и P' и произведението $OP.OP'$ е равно на дадена положителна константа r^2. Тая трансформация се нарича инверзия спрямо окржжностьта k съ центъръ O и радиусъ r.

И така, да предположимъ сега, че въ равнината е дадена една група G отъ трансформации. При всѣка отъ тѣхъ точка се преобразува въ точка, но правата напр. може да стане крива евентуално. Въобще ще има известни обекти (все отъ Евклидовата геометрия), които запазватъ вида си при всѣка трансформация отъ G, и такива, които го мѣнятъ. Сжщо ще имаме и неизмѣнни и измѣнящи се релации. Опредѣляме тогава: съвокупностьта отъ всички обекти, релации, величини и твърдения за тѣхъ, които оставатъ неизмѣнни при произволна трансформация отъ групата, наричаме една **геометрия**. Това е обобщението, твърде дълбоко и плодовито, което дължимъ на Клайнъ. Като продължимъ по-нататъкъ аналогията съ еднаквоститѣ, обектътъ P ще наречемъ **еквивалентенъ** съ обекта Q по отношение на групата G, ако сѫществува поне една трансформация отъ групата, която преобразува P въ Q; това ще бележимъ така $P \sim Q$. Тая еквивалентность има свойствата I.—III. благодарение именно на обстоятелството, че G е група. Наистина, G съдържа поне една трансформация φ и съ нея и обратната ѝ φ^{-1}, а следователно и тѣхното произведение $\varphi . \varphi^{-1}$; но то не е нищо друго, освенъ идентичната трансформация, при която всѣка точка се преобразува въ себе си. Тогава, ако P е единъ обектъ, има трансформация отъ G, именно идентичната, която трансформира P въ P, т. е. $P \sim P$. Нека $P \sim Q$, т. е. има трансформация φ отъ G, която привежда P въ Q; тогава φ^{-1} ще привежда Q въ P и понеже φ^{-1} е отъ G, поради груповитѣ свойства на G, следва $Q \sim P$. Най-после нека $P \sim Q$ и $Q \sim R$; ще има трансформации φ, ψ отъ G, тъй че φ привежда P въ Q, а ψ — Q въ R; произведението $\varphi . \psi$ ще привежда направо P въ R и, поради груповитѣ свойства на G, е отъ G, тъй че $P \sim R$. Необходимостьта да бѫдатъ изпълнени I.—III. за въведената еквивалентность ни кара да изберемъ именно група отъ трансформации, а не каква да е съвокупность отъ такива.

8. Проективна геометрия

Да обяснимъ нѣщата съ единъ примѣръ. Ние описахме по-рано проекцията на равнина α върху равнина α' отъ центъръ S. Въ нея имаше празнини: не всѣка точка отъ α има образъ въ α' и не всѣка отъ α' има оригиналъ въ α. Чрезъ въвеждане на нови точки — наречете ги идеални или неистински — ще избѣгнемъ тия изключения. Отъ чертежъ веднага се съобразява, че на всички прави, които минаватъ презъ една точка P на изключителната въ α права a отговарятъ въ α' прави, които сѫ успоредни. Тогава дефинираме: съвокупность отъ успоредни на едно направление прави въ една равнина (и аналогично въ пространството) ще наричаме **безкрайно отдалечена** или, по-кѫсо, **безкрайна точка**; една права ще минава презъ тази безкрайна точка, когато е отъ тоя снопъ успоредни прави, и само тогава. Понеже въ всѣка равнина имаме безбройно много такива снопове отъ успоредни прави съ различни направления, въ нея ще сѫществуватъ безбройно много безкрайни точки и тѣхната съвокупность наричаме (единствена въ равнината) **безкрайна права**. Аналогично въ пространството имаме безбройно много безкрайни точки и безкрайни прави, които лежатъ въ (единствена) **безкрайна равнина**. Всичко това сѫ само дефиниции. Да се върнемъ сега къмъ нашата проекция на α върху α'. Очевидно е, че на споменатата горе точка P, която нѣмаше образъ, ще трѣбва да считаме сега като образъ безкрайната точка P', представена съ снопа успоредни прави, за който говорихме; на правата a образъ ще бѫде безкрайната права на α'. Обратно, на точки отъ a' оригинали ще бѫдатъ безкрайнитѣ точки на α, а на a' — безкрайната права на α. Сега нашата проекция нѣма празнини и това е най-доброто оправдание за въвеждането на допълнителнитѣ точки и прави; тя е 1, 1-значна безъ изключение. Всѣка обикновена — крайна — точка или безкрайна точка наричаме п-точка или проективна точка; всѣка обикновена или безкрайна права — п-права. Равнината, попълнена съ безкрайнитѣ елементи, е проективна равнина; такава е и безкрайната равнина.

Да видимъ кои отъ основнитѣ понятия на Евклидовата геометрия оставатъ неизмѣнни при нашата проекция. Точка и права не сѫ неизмѣнни, понеже могатъ да нѣматъ образъ, но такива сѫ п-точка, п-права и пр. Понятието „между" изчезва съвсемъ; наистина — може лесно да се съобрази това — възможно е да се намѣри точка B между две точки A и C, но така, че образътъ B' да не е между A' и C'. Все пакъ и върху п-правитѣ има наредба на точкитѣ, подобна на наредбата на точкитѣ върху една Евклидова окрѫжность. П-правата се явява като затворена съ безкрайната си точка линия и две кои да е точки A, B отъ нея я дѣлятъ на две допълнителни отсѣчки; за две точки C и D отъ различни отсѣчки казваме, че раздѣлятъ A, B; ето тази релация между четиритѣ точки A, B, C, D остава неизмѣнна при произволна проекция. Лежането на п-точка върху п-права (или п-равнина въ пространството) е неизмѣнно понятие. Релациитѣ равенство на две отсѣчки или два ѫгла, обаче, се измѣнятъ при проектиране.

Предполагаме сега, че имаме п-равнинитѣ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha$, всѣки две съседни различни една отъ друга, и проекции: φ_0 на α върху α_1, φ_1 — на α_1 върху $\alpha_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ — на α_{k-1} върху α_k, най-после проекция φ_k на α_k върху пакъ α. Върнахме се отново въ α и получихме така 1, 1-значна трансформация на α върху себе си, именно произведението $\psi = \varphi_0 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \ldots \varphi_k$. Всѣка тъй получена трансформация на α върху себе си наричаме проективна трансформация въ α. Понеже междиннитѣ п-равнини и центроветѣ на проектиране сѫ съвсемъ произволни, при тѣхното измѣнение ще получимъ въ α безбройно много проективности и лесно е — наистина съвсемъ лесно — да се съобрази, че тѣхната съвокупность образува група: проективната група въ п-равнината α. Съ помощьта на тая група въ α се създава една нова геометрия — проективна геометрия. Може и въ пространството да се дефинира проективна група, най-просто чрезъ уравнения, свързващи координатитѣ на произволна точка отъ пространството съ тия на съответната ѝ точка.

Понеже въ проективната геометрия оставатъ неизмѣнни само следнитѣ основни понятия: п-точка, п-права и п-равнина и лежане на п-точка върху п-права и п-равнина, въ нея отъ Евклидовата геометрия ще остане само онова, което въ последната може да се дефинира само съ тия понятия. Не можемъ да говоримъ вече за успоредность, перпендикулярность, разстояние между точки, окрѫжность, квадратъ, лице; това всичко се измѣня при проекция. Има, обаче, нѣкои величини, които оставатъ неизмѣнни, макаръ че се дефиниратъ обикновено съ измѣнящи се величини; това показва, че тѣ трѣбва да могатъ да се дефиниратъ и само съ неизмѣнни понятия. Напр. двойното отношение $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ на четири крайни точки A, B, C, D върху една права не се измѣня, макаръ че разстоянията по отдѣлно се мѣнятъ.

Тая нова геометрия, обаче, е създадена по единъ не много задоволителенъ начинъ. Тя се отнася все още до понятия отъ Евклидовата геометрия и е като че ли часть отъ последната, логично зависи отъ нея, докато въ началото още казахме, че всѣка математична дисциплина се гради суверенно върху система основни понятия и аксиоми. Може ли и проективната геометрия да се обоснове самостоятелно, безъ посрѣдничеството на Евклидовата? Задачата е, следователно, отъ понятията въ проективната геометрия и проективнитѣ твърдения за тѣхъ да изберемъ известенъ брой понятия и твърдения, отъ които да следватъ всички останали проективни твърдения и понятия. Тая задача е била решена за първъ пѫть отъ германския геометъръ *Кристианъ фонъ Щаудтъ* (1798—1868) къмъ срѣдата на миналия вѣкъ. Проективната геометрия може да се обоснове върху следнитѣ основни понятия: точка, права, равнина, лежане на точка върху права или равнина, раздѣляне на две двойки точки върху една права, и върху три групи аксиоми: за свързването, за наредбата и за непрекѫснатостьта. Разбира се, нѣма нужда да говоримъ за крайни и безкрайни елементи; всички точки сѫ равноправни индивиди въ тая система. Отъ гледна точка на независимо изградената проективна геометрия, оная проективна геометрия въ Евклидовата, до която дойдохме съ видоизмѣняне на нѣкои понятия (безкрайнитѣ елементи!), се явява само единъ моделъ, едно реализиране, за каквито говорихме по-рано. Но тоя моделъ има и своето, не само историческо, оправдание; понеже по-рано доказахме непротиворечивостьта на Евклидовата геометрия, сѫществуването на това реализиране на проективната въ Евклидовата геометрия показва липсата на противоречия въ първата.

И тъй, изложихме единъ методъ, който ни дава много нови геометрии, като минаваме презъ Евклидовата геометрия;

при него използуваме група трансформации и после търсимъ въ получения моделъ основни понятия и аксиоми. Нека споменемъ само имената на нѣкои геометрии, до които може да се дойде по тоя начинъ: неевклидови геометрии на *Лобачевски-Болиай* и на *Риманъ*, геометрии на *Мьобиусъ*, на *Лагеръ*, на *Ли*, геометрия на *Минковски*, афинна геометрия, геометрия на правитѣ въ пространството. Вече и въ проективната геометрия можемъ да разглеждаме групи отъ трансформации и по такъвъ начинъ да идваме до други геометрии. Ще покажемъ единъ примѣръ за това.

9. Геометрия на Лобачевский-Bolyai

Нека въ една проективна равнина α изберемъ едно неизродено конично сѣчение k; да се помни, че това понятие се дефинира въ проективната геометрия. Сѫществуватъ безбройно много проективни трансформации въ равнината, при k остава въ покой, т. е. всѣка точка отъ k се трансформира въ точка пакъ отъ k; лесно се установява, че тия трансформации образуватъ група L. Да наречемъ л-точка всѣка точка вѫтре въ k, л-права — съдържащата само л-точки часть отъ една проективна права, която сѣче k. При всѣка трансформация отъ L всѣка л-точка или л-права се трансформира въ сѫщо такава; л-равнина е съвокупностьта отъ всички л-точки и л-прави. Геометрията, породена въ л-равнината отъ групата L, да наречемъ засега л-геометрия. Тя е по-богата по съдържание отъ проективната, понеже съдържа понятия, които трѣбва да бѫдатъ неизмѣнни при по-малко трансформации; именно групата на всичкитѣ проективни трансформации очевидно съдържа групата L. Не ще се спираме върху съдържанието на л-геометрията, но ще споменемъ само едно предложение отъ нея. Да вземемъ л-правата a и л-точката B, вънъ отъ правата. Питаме: колко л-прави има презъ B, които не сѣкатъ a, т. е. нѣматъ съ a общи л-точки? Отъ чертежъ всѣки вижда, че презъ B минаватъ две л-прави b_1, b_2, които нѣматъ общи л-точки съ a и такива, че въ два отъ врѣхнитѣ ѫгли, образувани отъ тѣхъ, лежатъ всички л-прави p презъ B, сѣчещи a, а всички л-прави q въ останалитѣ два врѣхни ѫгла не сѣкатъ a. Ясно е, че въ л-геометрията не е въ сила Евклидовата аксиома за успоредностьта. Можемъ да търсимъ сега въ л-геометрията основни понятия и аксиоми, но на това не ще се спираме, понеже ще дойдемъ до сѫщата геометрия и по другъ начинъ.

Не само Ерлангенската програма, обаче, ни снабдява съ правила за създаване нови геометрии. По-близъкъ до ума е другъ начинъ: да видоизмѣняме нѣкои отъ аксиомитѣ на дадена геометрия. Тоя пѫть е и по-старъ. Видѣхме, че Евклидовата геометрия е безъ противоречия, но съ това още не е казано всичко за логичната връзка между аксиомитѣ. Не е ли допустимо напр. една аксиома погрѣшно да е поставена между аксиомитѣ, а въ сѫщность да е доказуема съ помощьта на останалитѣ, да е зависима отъ тѣхъ? Скоро следъ Евклидъ тоя въпросъ е билъ поставенъ за аксиомата за успоредностьта. Отговорътъ е билъ търсенъ отъ редица гръцки, арабски и европейски геометри и е билъ намѣренъ едва въ 19. вѣкъ въ следната форма: тая аксиома е наистина независима отъ останалитѣ. И по пѫтя до тоя отговоръ е била открита хиперболичната или неевклидовата геометрия на Лобачевски-Болиай.

Първоначално е било търсено прѣко доказателство на аксиомата чрезъ другитѣ аксиоми; даванитѣ привидни доказателства винаги сж използували скрито твърдения, въ сѫщность доказуеми само съ съмнителната аксиома. Въ 17. вѣкъ патеръ *Джироламо Сакери* (1667—1733) обръща работата и търси косвено доказателство, като разсѫждава така: къмъ останалитѣ аксиоми на Евклидъ да прибавимъ вмѣсто спорната аксиома едно твърдение, което ѝ противоречи. Ако въ получената геометрия — тя е нова, отлична отъ Евклидовата — има противоречия, предположеното твърдение е недопустимо, остава да бѫде вѣрна аксиомата на Евклидъ и така тя ще бѫде доказана. Сегашната геометрия пъкъ добавя: ако въ новата геометрия нѣма противоречия, ще следва, че аксиомата на Евклидъ е независима отъ останалитѣ. Това е, впрочемъ, рецептата, чрезъ която се провѣрява независимостьта на известно предложение отъ други.

Въ първата третина на 19. вѣкъ едновременно, но независимо единъ отъ другъ, русинътъ *Николай Ивановичъ Лобачевский* (1793—1856) и унгарецътъ *Яношъ Болиай* (1802—1860) чрезъ изследвания въ сѫщата посока идватъ до убеждението, че новата геометрия е безъ противоречия, че тя сѫществува отъ логична гледна точка толкова, колкото и Евклидовата, и я развиватъ подробно. Това тѣхно убеждение не е обосновано по напълно безупрѣченъ начинъ въ духа на изложенитѣ начини за доказване непротиворечивостьта, но усилията имъ не отиватъ напразно: макаръ и по-късно, математическиятъ свѣтъ обръща вниманието си върху неевклидовата геометрия и върху двамата забравени нейни творци.

И ето Клайнъ намира, че оная л-геометрия въ проективната, за която говорихме, не е нищо друго, освенъ моделъ на геометрията на Лобачевски—Болиай. Сѫществуването на тоя моделъ въ непротиворечивата проективна геометрия показва и липсата на противоречия въ новата. Едновременно съ това сѫщиятъ моделъ дава удобенъ начинъ за разработване на тая нова, наричана още х и п е р б о л и ч н а, г е о м е т р и я. Отъ описания втори пѫть до нея е ясно, че тая геометрия има всички основни понятия на Евклидовата и всички нейни аксиоми, като само тая за успоредностьта е замѣнена съ следната: въ една равнина презъ една точка минаватъ най-малко две прави, които не пресичатъ дадена права, неминаваща презъ точката. Л-геометрията има общи съ Евклидовата геометрия всички теореми, доказуеми съ помощьта на останалитѣ аксиоми, специално оная, която ни дава мѣрнитѣ числа на отсѣчкитѣ; значи, дефинирани сж и тукъ разстояния между точкитѣ и сжщо величинитѣ на жглитѣ. Има и много отлики. Тукъ не сжществуватъ подобни трижгълници: съ равни жгли, но неравни страни. Сборътъ отъ вжтрешнитѣ жгли на трижгълника е по-малъкъ отъ два прави жгла. Точкитѣ на постоянно разстояние отъ дадена права не образуватъ две прави, а крива. Около единъ трижгълникъ не всѣкога може да се опише скрж жность. Но и въ л-равнината има група отъ трансформации, които запазватъ разстоянията; при тѣхъ се запазватъ и всички останали понятия. Въ описания моделъ при основно конично сѣчение k тия трансформации сж всички проективни, които запазватъ k въ покой и за които говорихме по-горе; тѣ съставятъ групата L.

Но има и модели отъ другъ сортъ въ самата Евклидова геометрия, които реализиратъ хиперболичната, макаръ и не тъй съвършено. Такъвъ е даденъ най-напредъ отъ италиянския математикъ *Еудженио Белтрами* (1835—1900) въ 1868 г. и именно тогава се събужда интересътъ къмъ откритието на Лобачевский и Болиай. Нека S е една повърхнина въ Евклидовата геометрия и да си изберемъ две точки върху нея. Измежду безбройното много линии върху S, които минаватъ презъ двета точки, при известни предположения ще има точно една, която е най-кжса и тя се нарича г е о д е з и ч н а л и н и я. Презъ всѣка точка минаватъ безбройно много геодезични ,но само една, ако е дадена и тангентата ѝ въ тая точка. Белтрами намира, че върху достатъчно малки области отъ една проста повръхнина, наречена п с е в д о с ф е р а, важатъ всички теореми на геометрията на Лобачевский-Болиай, ако подъ права разбираме геодезична, подъ разстояние между две точки — дължината на джгата отъ геодезичната между тѣхъ, а жгълътъ между геодезичнитѣ („правитѣ линии") се мѣри по Евклидовски.

Видѣхме по-рано, че за проективната геометрия има моделъ въ Евклидовата и исторически така е била създадена първата. Твърде сжществено е обстоятелството — и то е представяло единъваженъ етапъ къмъ Ерлангенската програма — че обратно за Евклидовата геометрия има простъ моделъ въ проективната, подобенъ на тоя за хиперболичната. Изясняването му, обаче, би изисквало повече време и затова ще изкажа само резултата: отъ всички проективни трансформаци въ една равнина избираме ония, които оставятъ неизмѣнна една елиптична инволюция върху една права; тѣ образуватъ група и породената отъ нея геометрия е почти Евклидовата —

необходими сж още нѣкои допълнителни ограничения. Интересното е, казвамъ го мимоходомъ, че, ако вмѣсто елиптична, вземемъ хиперболична инволюция, съответната геометрия стои въ тѣсна връзка съ специалната теория на относительностьта — това е геометрията на Минковски.

Измежду изброенитѣ и други подобни геометрии проективната е най-простата, въ смисълъ, че се изгражда съ най-малко основни понятия и аксиоми; отъ друга страна, всички тѣ иматъ свои модели въ проективната, евентуално въ пространство съ повече измѣрения. Това говори за особено важното значение на тая нова геометрия и не сж пресилени думитѣ на английския юристъ и математикъ *Артуръ Кейли* (1821—1895): „All geometry is projective“.

10. Многоизмѣрими геометрии на Riemann

Въ термина „многоизмѣримо пространство“, който употрѣбихме преди малко, нѣма нищо необикновено и мистично. Когато геометрията твърди, че пространството на Евклидовата геометрия е триизмѣримо, тя (поне класичната геометрия) подразбира само следното: между точкитѣ на пространството и нареденитѣ тройки реални числа може да се установи 1,1-значно съответствие, както ни учи аналитичната геометрия. Нищо не ни прѣчи да третираме и многоизмѣрими пространства, прости обобщения на Евклидовото, хиперболичното, проективното и пр., като се възползуваме отъ резултатитѣ на съответнитѣ аналитични геометрии за познатото триизмѣримо пространство. Да наречемъ аритметично пространство A_n съ n измѣрения съвокупностьта отъ всички наредени n-торки отъ реални числа; всѣка такава n-торка е точка на това пространство. Уславяме се подъ разстояние между точкитѣ $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ да разбираме положителното реално число $d = |\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}|$ и да казваме, че точката Y лежи между точки X и Z, ако имаме равенството $XZ = XY + YZ$ за разстоянията. 1,1-значнитѣ трансформации на A_n върху себе си, при които разстоянията между точкитѣ се запазватъ, ще наречемъ еднаквости; тѣхниятъ аналитиченъ изразъ може да се намѣри отъ дефиниционното условие. Тѣ образуватъ една група отъ трансформации въ A_n и породената отъ нея геометрия въ A_n е n-измѣримата Евклидова геометрия. Разбира се, тази геометрия може да се обоснове и аксиоматически; основнитѣ понятия се увеличаватъ, аксиомитѣ за свързването сжщо, но другитѣ групи аксиоми оставатъ неизмѣнни.

Виждаме, че n-измѣримото Евклидово пространство не е само съвокупностьта A_n отъ всички наредени n-торки реални числа, а нѣщо повече: тази съвокупность, като ѝ сж придадени известни свойства чрезъ израза за разстояние или чрезъ групата на еднаквоститѣ, известна структура, както още се казва. Нищо не ни принуждава да опредѣляме тая структура съ помощьта на една група отъ трансформации; мислими сж и други начини. Развитието на тая идея, изказана за пръвъ пжть отъ гениалния нѣмски математикъ *Бернхардъ Риманъ* въ неговата знаменита лекция „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", 1857 (т. е. преди Ерлангенската програма и, следователно, не като противопоставяне на идеитѣ на Клайнъ, които още не сж били изказани), ни води вече до геометрии отъ по-другъ характеръ, непобиращи се въ рамкитѣ на Ерлангенската програма. При последнитѣ геометрии винаги сжществуваше една група трансформации и чрезъ последнитѣ обектитѣ преминаваха единъ въ другъ; така да се каже обектитѣ допускаха движения (това сж въпроснитѣ трансформации), чрезъ които тѣ можеха да се налагатъ единъ върху другъ и сравняватъ помежду си. Идеята на Риманъ е да се даде структура на пространството въ всѣка негова точка или по-добре въ достатъчно малка околность на всѣка точка; всѣка точка и по-нататъкъ всѣка съвокупность отъ точки сж надарени съ известни свойства и за разнитѣ тия съвокупности свойствата могатъ да се сравняватъ, безъ да се прибѣгва къмъ премѣствания. Това становище е отъ голѣмо значение за модернитѣ физични теории, споредъ които въ всѣка точка физичното пространство — наречете го, ако искате, електромагнитно поле или етеръ, носи известни свойства. И не случайно дълбокитѣ постижения по посочения отъ Риманъ пжть се дължатъ до голѣма степень на бурното развитие на теоретичната физика въ последнитѣ петдесеть години. Схемата на Риманъ обгръща тая на Клайнъ; обратно принципитѣ на Клайнъ намиратъ по другъ начинъ приложение въ обобщения на Римановитѣ идеи, отиващи далечъ задъ онова, което е развилъ самиятъ Риманъ.

Тия общи и затова неясни разсжждения ще освѣтлимъ съ единъ примѣръ, взетъ пакъ отъ Евклидовата геометрия. Нека S е една каква да е повърхнина и x, y, z сж координатитѣ на произволна точка M отъ S относно една правожгълна пространствена координатна система. Съвременната геометрия представя x, y, z като функции на две помощни величини, параметри, u, v: $x = \varphi(u, v)$ $y = \psi(u, v)$, $z = \omega(u, v)$, така че, когато u, v вззематъ всевъзможни реални стойности, получаваме всички точки отъ S. Нека $M(x, y, z)$ е една точка отъ S, получена при стойности на параметритѣ u, v; $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ е близка точка до M съ параметри $u+du, v+dv$. Разстоянието между M и M' е $ds = |\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}|$; по правилата на диференциалното смѣтане намираме

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \quad F = \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

така че ds^2 се получи като квадратна диференциална форма на du, dv съ коефициенти функции на u, v; тѣхнитѣ стойности, разбира се, ще се мѣнятъ отъ точка на точка. Изразътъ ds^2 ни позволява да намѣримъ дължината на каква да е крива MN върху повръхнината; получаваме именно

$$\int_M^N \sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}\,.$$

Ако върху повръхнината имаме пакъ M и близкитѣ точки

$$M'(x+dx,\ y+dy;\ z+dz;\ u+du,\ v+dv),$$

$$M''(x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z;\ u+\delta u,\ v+\delta v),$$

отъ $\triangle MM'M''$ се намира жгъла $\varphi = \sphericalangle M'MM''$ по формулата

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Виждаме, че съ помощьта на диференциалната форма ds^2 имаме възможность да мѣримъ дължинитѣ на кривитѣ и жглитѣ въ една точка и така да ги сравняваме за различни криви и различни точки.

Сжществуватъ редица величини и свойства на фигуритѣ върху повръхнината, които зависятъ, се изразяватъ аналитически само съ функциитѣ E, F, G; казано накратко и немного точно, тѣхната съвокупность образува така нареченатa вжтрешна геометрия на повръхнината. Ето единъ примѣръ за такава величина: лицето, заградено отъ произволна затворена крива върху S, се изразява съ E, F, G и е обектъ отъ вжтрешната геометрия. Геодезичнитѣ криви сж също отъ нея, тъй като се дефиниратъ съ изискване, отнасяще се до дължина на крива. Отъ голѣмо значение е една друга величина; ще й дадемъ най-кратката отъ сегашната ни гледна точка дефиниция, макаръ и не най-употрѣбимата. Презъ точката M отъ S минаватъ безбройно много геодезични. Върху всѣка отъ тѣхъ нанасяме една и сжща дължина r и краищата ще лежатъ на една затворена крива — геодезична окржжность; дължината й нека е l. Изразътъ $K_r = \frac{3}{\pi}\frac{2\pi r - l}{r^3}$ зависи отъ r и, когато r клони къмъ 0, въобще ще клони къмъ едно опредѣлено число, което наричаме тотална или Гаусова кривина на S въ M. Тая величина е отъ вжтрешната геометрия, както личи отъ самата дефиниция, и въобще ще се мѣни отъ точка на точка.

Следъ тоя примѣръ обобщението е лесно. Да наречемъ пакъ A_n съвокупностьта отъ всички наредени n-торки реални числа $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ [(при повръхнината имаме двойки (u, v)]. Избираме си $\frac{1}{2} n(n+1)$ функции $g_{ij} = g_{ji}$ на $u_1, u_2, \ldots, u_n$, удовлетворяващи за всѣка стойность на $u_1, u_2, \ldots, u_n$ едно допълнително неравенство, което не пишемъ сега (при повръхнината имаме функции E, F, G). Ако оставимъ всички u_i да зависятъ отъ единъ параметъръ t, при измѣнянето му точката (u_i) ще опише една крива; при два независими параметра ще имаме повръхнина, при три—триизмѣримо пространство и т. н. Уславяме се подъ дължина на една крива да разбираме интеграла

$$\int_M^N \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, du_i\, du_j},$$

а подъ ѫгълъ между две криви—опредѣления отъ

$$\cos\varphi = \frac{\Sigma g_{ij} du_i \delta u_i}{\sqrt{\Sigma g_{ij} du_i du_j} \cdot \sqrt{\Sigma g_{ij} \delta u_i \delta u_j}}.$$

Чрезъ диференциалната форма $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i du_j$ по тоя начинъ създадохме структура въ нашето A_n. Съвокупностьта отъ всички фигури, величини, релации, свойства за тѣхъ, които аналитически могатъ да се изразятъ чрезъ коефициентитѣ g_{ij} — и то въ форма, независеща отъ параметритѣ $u_1, \ldots, u_n$, спрямо които е отнесена съвокупностьта A_n—е, накжсо казано, Римановата геометрия на A_n при избраната основна диференциална форма ds^2. Напримѣръ и тукъ могатъ да се дефниратъ геодезични криви, лице на повръхнина и т. н. Ето една система важни величини, обобщение на Гаусовата кривина; тѣ сж дефинирани още отъ Риманъ. Нека пакъ M е една точка отъ S и G е произволна повръхнина презъ нея, съставена само отъ геодезични линии презъ M. Такива геодезични повърхнини презъ M има безбройно много и за всѣка отъ тѣхъ можемъ да си дефинираме Гаусовата кривина въ точка M. Може да се покаже, че ако знаемъ за $\frac{1}{2} n(n-1)$ подходяще избрани геодезични повръхнини презъ M съответнитѣ кривини, ще можемъ да намѣримъ по простъ начинъ и кривината на произволна геодезична повърхнина презъ M. Тия $\frac{1}{2} n(n-1)$ специални Гаусови кривини се мѣнятъ отъ точка на точка, сж функции на $u_1, u_2, \ldots, u_n$. При $n=2$ имаме само една Гаусова кривина, която съвпада съ дефинираната по-рано.

Каква е сега връзката между Римановата геометрия и онова, което говорихме по-рано? И въ Евклидовата геометрия, и въ хиперболичната имаме сжщо понятията разстояние между точки и величина на жгълъ и чрезъ подходящи координатни системи можемъ да получимъ съответната диференциална форма за ds^2; за Евклидовата напр. при правожгълни координати x, y, z тя е $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, което използувахме и по-горе. Значи, тия геометрии сж частенъ случай отъ Римановата. Но въ тѣхъ имахме и нѣщо повече: сжществуваха безбройно много трансформации, които запазваха разстоянията между точкитѣ. Да си поставимъ тогава въ общата Риманова геометрия обратната задача: да се намѣрятъ всички Риманови пространства (т. е. съответнитѣ функции g_{ij}), които допускатъ безбройно много трансформации въ себе си съ свойството, че дължината на всѣка крива, дефинирана съ дадения горе интегралъ, се запазва при всѣка отъ тѣхъ. Третирането на проблемата, поставена така общо, е сложно и затова ще изкажемъ единъ частиченъ резултатъ: Ако дефиниранитѣ по-горе Гаусови кривини не зависятъ нито отъ геодезичната повърхнина, нито отъ точката въ пространството, последното допуска група трансформации съ желанитѣ свойства; то се нарича Риманово пространство съ постоянна кривина K. Оказва се, че при $n=2$ за повръхнинитѣ съ $K=0$ Римановата геометрия съвпада съ Евклидовата; при $K<0$ и постоянно имаме хиперболичната геометрия. Римановата геометрия за $n=2$, $K>0$ и постоянно, се осжществява върху достатъчно малки области на сферата.

Какъ става врежданeто на проективната геометрия напр., кждето нѣма разстояния, макаръ че има група трансформации, въ една, по-обобщена отъ Римановата, геометрия не ще излагаме. Въ тия области и сега усилено се работи; струва ни се, обаче, излишно да изброяваме имена на съвременни геометри, изследващи тѣзи въпроси, и да изреждаме резултати, безъ да можемъ да дадемъ дори предварителнитѣ понятия, необходими за разбирането на тѣзи резултати.

Римановата геометрия и нейнитѣ обобщения могатъ да се обосноватъ и аксиоматически, макаръ че тѣхнитѣ аксиоми не сж така прости, както за изложенитѣ по-рано геометрии, тъй като още отъ началото се въвежда числото: точката се дефинира като съвокупность отъ реални числа, макаръ че има и по-други изложения, които въ сжщность прикриватъ тая дефиниция. Въобще въ тия геометрии царува неограничено анализътъ, докато Клайновитѣ обикновено допускатъ независимо отъ него третиране, макаръ че и тамъ могатъ да се въведатъ координати.

11. Топологии

Накрая нека споменемъ и една друга група геометрии, сжщо тъй модерни, както Римановитѣ. Тѣ пъкъ използуватъ рѣдко числото и се обосноваватъ обикновено чисто аксиоматически съ малъкъ брой прости аксиоми. Да тръгнемъ пакъ отъ Евклидовата геометрия. Ние срѣщахме въ нея свойства, неизмѣнни при еднаквости или при проективни трансформации. Бихме могли да разглеждаме, обаче, и много по-общи трансформации, именно ония, които запазватъ непрекжснатостьта на фигуритѣ. Непрекжснатостьта е едно сложно понятие и не е мѣстото тукъ да го анализираме; затова ще си послужимъ съ нѣкои физични представи, само за да пояснимъ за какво се касае. Да веземемъ една каучукова нишка, затворена въ формата на окржжность. На сжщата тая нишка лесно можемъ да дадемъ форма на друга затворена крива, непресичаща себе си. Ако това измѣнение е направено безъ обтѣгане или свиване на нишката, получаваме едно 1, 1-значно сьответствие между първоначалнитѣ положения на точкитѣ върху окржжностьта и новитѣ имъ положения върху другата крива, като формата се е измѣнила, но дължинитѣ се запазватъ; съ такива трансформации се занимава много Римановата геометрия. Ние можемъ, обаче, и да обтѣгнемъ нишката; 1, 1-значностьта се запазва, но дължинитѣ вече се измѣнятъ. Остава само свойството, че и новата крива е навсѣкжде непрекжсната, заедно съ старата.

Можемъ тогава да поставимъ проблемата за търсене свойствата на фигуритѣ въ Евклидовата равнина, запазващи се при произволни непрекжснати изображения на фигуритѣ една върху друга. Такива свойства има: ето такова е напр. свойството на всѣка непрекжсната затворена крива, непресичаща сама себе си, да дѣли равнината на вжтрешность и външность. Съвокупностьта отъ тия свойства образува топологията на Евклидовата равнина. Внимателното анализиране на съдържанието ѝ показва, че основната роля въ тая топология — специално, за да дефинираме непрекжснатостьта — играе понятието околность на една точка, т. е., грубо казано, съвокупностьта отъ всички точки, достатъчно близки до дадена точка. Тия околности иматъ редица свойства, обусловени отъ свойствата на Евклидовата равнина, напр. че две точки винаги притежаватъ околности безъ общи точки. Можемъ да издигнемъ нѣкои отъ намѣренитѣ свойства на околноститѣ до ранга на аксиоми и споредъ това, дали по-малко или повече отъ тия свойства (разбира се, независими) сж взети за аксиоми, получаваме повече или по-малко общи топологии. Чрезъ въведенитѣ аксиоми именно се създава структура на пространството.

12. Що е геометрия?

Следъ всичко, което изложихъ до тукъ, ще ми се да вървамъ, че слушателитѣ сѫ се убедили въ логичното сѫществуване — за друго не става дума — на много и различни геометрии; считаме ги различни, защото се занимаватъ съ понятия, които иматъ свойства, напълно или поне отчасти отличаващи се отъ свойствата на аналогични понятия въ други геометрии. Разбира се, не е сѫществено, че названията на понятията сѫ различни, а това, че приписванитѣ имъ чрезъ аксиомитѣ особености не съвпадатъ въ разнитѣ геометрии. Така напр. въ геометрията на Ли не сѫществува понятието точка, а основно е понятието окрѫжность; ние спокойно бихме могли последното да наречемъ съ името „точка" и все пакъ тая геометрия поради това още не ще прилича на „точковитѣ" геометрии — Евклидова, проективна, хиперболична и пр.; защото съотношенията между тия „точки" и другитѣ фигури въ геометрията на Ли, все едно какъ ги наричаме, не приличатъ на съотношенията между точкитѣ и другитѣ фигури въ точковитѣ геометрии. Онова, което казахъ, е твърде малка часть отъ това, което трѣбва да се каже, за да се затвърди убеждението — не вѣрата! — въ сѫществуването на различни геометрии. Обстоятелствата не позволяватъ да се направи това; ще се радвамъ, ако само съмъ могълъ да дамъ представа за разнообразието и богатството на въпроситѣ, които вълнуватъ геометритѣ отъ единъ вѣкъ насамъ.

Остана, обаче, единъ неясненъ въпросъ: щомъ има разни геометрии, какво е геометрия въобще? Казахме, че всѣка геометрия се гради върху система основни понятия и аксиоми, но, разбира се, никѫде не твърдимъ, че обратно всѣка математична дисциплина, изградена по тоя начинъ, е геометрия; иначе и анализътъ ще трѣбва да причислимъ къмъ геометриитѣ. Какъвъ е критериятъ, по който ще отличаваме геометриитѣ отъ другитѣ клонове на математиката? Струва ми се, че поставениятъ въпросъ нѣма и не може да има много ясенъ смисълъ и затова най-добре ще бѫде, може би, да се даде следниятъ неопредѣленъ и вѣроятно за мнозина незадоволителенъ отговоръ: една математична дисциплина е геометрия, ако поне донѣкѫде прилича на Евклидовата геометрия. Американскиятъ математикъ *Вебленъ* казва: „Единъ клонъ отъ математиката вѣроятно се нарича геометрия, понеже името изглежда подходяще, поради субективни или традиционни съображения, за достатъченъ брой компетентни хора". Все едно, обаче, какъ ще отговоримъ на занимаващия ни въпросъ, науката ще върви напредъ и ще прибавя нови скѫпоценности въ общата съкровищница на човѣшкитѣ познания; въ тоя непрестаненъ ходъ напредъ се състои нейната цель, а не въ спорове върху имена.

(Постѫпила на 21. декемврий 1941 год.).