Година LVIII 1965 год.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Математически факултет

ПОНЯТИЕТО РАВНОМЕРНА НЕПРЕКЪСНАТОСТ И НЕГОВОТО ИСТОРИЧЕСКО РАЗВИТИЕ

(Встъпителна лекция, прочетена на 27. II. 1964 г.)

Дойчин Дойчинов

Топологията или по-точно онази нейна част, която днес е прието да се нарича обща топология, би могла да се нарече още теория на непрекъснатите съответствия. Аз няма да се спирам тук на дългия и сложен път, през който е преминала идеята за непрекъснатост, която в първоначална форма има корените си още в древността. Ще отбележа само, че съвременното понятие за непрекъснатост на една функция е било ясно формулирано в един сравнително късен период от развитието на математическата наука. Едва в 1817 г. Болцано [1] и в 1821 г. Коши [2] за пръв път въвеждат строго това понятие, играещо такава основна роля в целия анализ.

Както е известно, една функция $f(x)$, дефинирана в някакво числово множество M, се нарича *непрекъсната* в дадена точка $x \in M$, ако при всеки избор на числото $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число $\delta > 0$, че от неравенството $|x'-x| < \delta$, гдето $x' \in M$, да следва неравенството $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$.

Когато обаче в началото на този век, след работите на Фреше [3] и други автори, в математиката беше въведено понятието метрично пространство, стана ясно, че в същност в дефиницията на понятието непрекъснатост съвсем не е съществено това, че става дума за функция, дефинирана в едно множество от числа и приемаща сама числени стойности. Тази дефиниция съвсем естествено може да се прередактира така, че да придобие смисъл и за случая, когато е дадено някакво еднозначно съответствие на едно метрично пространство в друго. За целта достатъчно е да забележим, че модулът на разликата между две числа в същност представлява разстоянието между тях относно една метрика. Тогава естествено се стига до дефиницията, според която съответствието f на метричното пространство X в метричното пространство Y се нарича *непрекъснато в точка* $x \in X$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова, че от $\rho(x', x) < \delta$ да следва $\rho(f(x'), f(x)) < \varepsilon$. По такъв начин се дойде до едно колкото естествено, толкова и силно обобщение на понятието непрекъснатост, което изведнъж разкри нови пътища за третирането на редица математически проблеми, подготвяйки създаването на такава бурно развиваща се днес математическа област, каквато е функционалният анализ.

Колкото и важно обаче да бе това обобщение на понятието непрекъсната функция, то не беше последната дума в това направление. Почти по същото време с разлика от само няколко години математиката достигна до ново, много по-далеч отиващо обобщение на това понятие — обобщение, в основата на което легна понятието топологично пространство.

Топологията, по-точно общата топология в съвременния смисъл на думата, може да се счита, че съществува от 1914 г., когато Хаусдорф [6] написа прочутата си „Теория на множествата". Появяването на тази книга обаче бе предшествувано от един дълъг период на подготовка, започнал още тогава, когато Риман [4] в своята знаменита встъпителна лекция постави, макар и в най-обща форма, задачите на топологията — период, през време на който Кантор доста подробно изучи топологичните свойства на реалната права, а Хилберт [5] в 1902 г. за пръв път формулира, макар и в не съвсем завършен вид, аксиомите на топологичното понятие за околност на една точка.

Ще припомня съвсем слабо видоизменени аксиомите, с помощта на които Хаусдорф въвежда понятието топологично пространство. Нека X е едно произволно множество. Казваме, че X е **топологично пространство**, ако на всяка точка $x \in X$ е съпоставена една система $O(x)$ от подмножества на X, наречени „**околности**" на точката x, като при това са изпълнени следните условия:

1. $x \in U$ за всяко $U \in O(x)$;

2. ако $U \in O(x)$ и $V \in O(x)$, то съществува такова $W \in O(x)$, за което $W \subset U \cap V$;

3. ако $U \in O(x)$, то съществува такова $V \in O(x)$, че за всяко $y \in V$ може да се намери някое $W \in O(y)$, за което $W \subset U$.

Както е известно, понятието топологично пространство дава възможност да се формулира следното обобщение на понятието непрекъснатост. Едно съответствие f на топологичното пространство X в топологичното пространство Y се нарича **непрекъснато в точка** $x \in X$, ако за всяка околност V на точката $f(x)$ съществува такава околност U на точката x, че $f(U) \subset V$.

Измежду различните, еквивалентни помежду си начини за въвеждане на понятието топологично пространство ще спомена с оглед на по-нататъшното изложение още и онзи, който бе предложен от Куратовски [7] в 1922 г. и който се състои в следното. На всяко подмножество A на пространството X се съпоставя някакво друго подмножество $[A]$, наречено „**затворена обвивка**" на A, при което:

1. $A \subset [A]$;

2. $[A \cup B] = [A] \cup [B]$;

3. $[[A]] = [A]$;

4. $[\varnothing] = \varnothing$*.

При това едно съответствие f на дадено топологично пространство в друго се нарича непрекъснато, ако за всяко множество A имаме $f([A]) \subset [f(A)]$.

Въвеждането на понятието топологично пространство, както и на понятието непрекъснатост на едно съответствие между топологични пространства, се оказа много плодотворно. От друга страна, има всичките основания да се счита, че именно с това понятие за непрекъснатост, което ни донесе топологията, е достигната оная най-голяма общност на идеята за непрекъснатост, която съответствува на дадения исторически етап от развитието на математическата наука. Във всеки случай развитието на математиката през последните 50 години, характеризиращо се с появяването и бурния растеж на редица нови, съвършено абстрактни области, с нищо не дава указание за необходимостта от някакво по-нататъшно обобщение на това понятие.

А сега искам да се спра на развитието на друго едно понятие, тясно свързано с понятието непрекъснатост и играещо също така основна роля в анализа — понятието равномерна непрекъснатост. То бе въведено за пръв път от Хайне [8] в 1870 г. Още при строгото въвеждане на понятието непрекъснатост на една числова функция естествено се поражда идеята за равномерна непрекъснатост. Ако една функция $f(x)$, дефинирана в числовото множество M, е непрекъсната във всички точки от това множество, и ако ε е положително число, то за всяка точка $x \in M$ може да се намери такова положително число δ, че от $|x' - x| < \delta$ да следва $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Ясно е при това, че изборът на числото δ зависи не само от избора на числото ε, но и от избора на точката x. Ако изборът на числото δ може да се извърши независимо от избора на точката x, то функцията $f(x)$ се нарича равномерно непрекъсната в множеството M. Разбира се, тази дефиниция се пренася без каквито и да е затруднения и върху съответствия между метрични пространства. Не се вижда обаче непосредствено по какъв начин тази идея би могла да се пренесе за съответствия между топологични пространства. И повече от двадесет години математиката, разполагайки с понятието за непрекъснато съответствие между топологични пространства, не разполагаше с понятие от същата общност за равномерната непрекъснатост. Едва през 1936—1937 г., когато почти едновременно бяха въведени близостните и равномерните пространства, понятието равномерна непрекъснатост бе обобщено, и то по два различни начина.

Първите аксиоми относно близостните пространства са били формулирани още през 1908 г. от Ф. Рис [9] на международния математически конгрес в Болоня, но не са получили развитие. В 1936 г. те отново биват открити и допълнени от съветския математик Ефремо-

* С $\varnothing$ е означено празното множество.

вич [10], който фактически се счита за създател на теорията на близостните пространства. За да схванем по-добре пътя, по който Ефремович е дошъл до идеята за близостните пространства, нека спрем още веднъж вниманието си на метода на Куратовски за дефиниране на понятието топологично пространство. От аксиома 1. се вижда, че затворената обвивка $[A]$ на едно множество A се получава, като към точките на самото множество A се прибавят евентуално и някои други точки — това са такива точки, които, така да се каже, трябва да бъдат разглеждани като близки до множеството A. Другояче казано, въвеждането на понятието затворена обвивка е равносилно на въвеждането на една релация за близост между точките на пространството X, от една страна, и всевъзможните негови подмножества, от друга. Естествено тогава се явява желанието да се направи опит за въвеждането на такава релация за близост, която да бъде дефинирана между двойки произволни подмножества на даденото пространство X и която освен това да бъде обобщение на топологичната близост, разбирана в току-що казания смисъл. Това именно бе осъществено от Ефремович. Въвеждайки релацията близост между двойки подмножества на даденото пространство X, при което всеки две подмножества A и B са или б л и з к и (което се бележи така — $A \delta B$), или д а л е ч н и (което се бележи така — $A \bar{\delta} B$), той формулира следните аксиоми, които трябва да удовлетворява тази релация:

1. ако $A \delta B$, то $B \delta A$;
2. $A \delta (B \cup C)$ тогава и само тогава, когато $A \delta B$ или $A \delta C$;
3. $x \delta x$ за всяко $x \in X$;
4. $\emptyset \bar{\delta} X$;
5. ако $A \bar{\delta} B$, то съществува такова C, че $A \bar{\delta} C$ и $B \bar{\delta} (X-C)$.

Когато в дадено пространство X е въведена една релация за близост, удовлетворяваща горните аксиоми, казваме, че тя превръща X в б л и з о с т н о п р о с т р а н с т в о. Един прост пример за близостно пространство ни дават метричните пространства, в които винаги може да се въведе близост, считайки, че две множества са близки тогава и само тогава, когато разстоянието помежду им е нула. Лесно е да се провери, че ако е дадено едно близостно пространство X и ако за всяко негово подмножество A дефинираме затворената обвивка на A като множество от всички близки до A точки, то аксиомите на Куратовски ще бъдат удовлетворени. Това ще рече, че във всяко близостно пространство естествено се поражда една топология, т. е. че всяко близостно пространство е едновременно и топологично пространство. При това различни близости могат да пораждат една и съща топология. Не всяко топологично пространство обаче може да бъде разглеждано като породено от някоя близост. Оказва се, че дадена топология произхожда от близост тогава и само тогава, когато тя удовлетворява една от аксиомите за отделимост — аксиомата за пълната регулярност.

Едно съответствие f на дадено близостно пространство X в друго близостно пространство Y се нарича близостно непрекъснато, ако образите на всеки две близки множества в X са близки в Y, т. е. ако от $A \delta B$ следва винаги $f(A) \delta f(B)$. Ако си спомним дефиницията за непрекъснато съответствие между две топологични пространства във формата на Куратовски и ако си дадем сметка, че тя в същност изисква всяка точка, близка до дадено множество A, да се трансформира в точка, близка до образа на A, става ясно, че всяко близостно непрекъснато съответствие е същевременно и непрекъснато.

Интересът към близостните пространства се повиши, когато Ефремович неочаквано установи, че в случая на метрични пространства (които, както вече споменах, могат да се разглеждат и като близостни пространства) понятието близостна непрекъснатост съвпада с понятието равномерна непрекъснатост. Този резултат наричам неочакван, тъй като възникването на теорията на близостните пространства, както вече изтъкнах, бе предизвикано в същност от желанието да се разшири топологичното понятие за близост между точка и множество, а съвсем не от желанието да се обобщи понятието равномерна непрекъснатост. Аз бих искал обаче да изкажа тук мисълта, че този факт — фактът, че по този начин се дойде до едно обобщение на понятието равномерна непрекъснатост — е не само бил неочакван, но той в известен смисъл е и случаен. С това искам да кажа, че макар с въвеждането на близостните пространства и да достигаме до едно обобщение на равномерната непрекъснатост, все още не сме направили оная крачка, която би ни дала правото на увереност в това, че сме достигнали именно до онова понятие, което по своето взаимоотношение с понятието непрекъснато съответствие между топологични пространства да се схваща като естествено обобщение на понятието равномерна непрекъснатост. Смисълът на тези не много ясни думи, надявам се, ще стане по-ясен от по-нататъшното изложение.

За да завърша с близостните пространства, нека спомена, че тяхната теория бе подробно развита едва преди около десетина години главно от съветския математик Ю. Смирнов [11], който между другото установи, че съществува взаимно-еднозначно съответствие между всевъзможните близостни пространства, пораждащи дадено напълно регулярно топологично пространство, от една страна, и всевъзможните компактни разширения на това пространство, от друга.

Както вече споменах, почти едновременно с възникването на близостните пространства френският математик А. Вейл [12] създаде теорията на така наречените равномерни пространства. Вейл се ръководи от желанието да дефинира понятие за близост от различен порядък, определена между двойки точки на дадено пространство X. Това се постига по следния начин. Разглежда се една фамилия F от подмножества U на декартовото произведение $X \times X$ (които именно символизират близостите от различен порядък). Фамилията F се нарича равномерна структура, когато е подчинена на следните условия:

1. $(x, x) \in U$ за всяко $x \in X$ и за всяко $U \in F$;

2. ако $U \in F$ и $V \in F$, то съществува такова $W \in F$, че $W \subset U \cap V$;

3. ако $U \in F$, то съществува такова $V \in F$, че от $(x, y) \in V$ следва $(y, x) \in U$;

4. ако $U \in F$, то съществува такова $V \in F$, че от $(x, z) \in V$ и $(z, y) \in V$ следва $(x, y) \in U$.

Всяка равномерна структура F превръща X в равномерно пространство. Най-прост пример за равномерно пространство ще получим, ако вземем едно метрично пространство и на всяко положително число ε съпоставим множеството U_ε, съставено от ония точки $(x, y) \in X \times X$, за които $\rho(x, y) < \varepsilon$. Тогава фамилията на всички U_ε, когато ε се мени, ще представлява една равномерна структура. Може да се покаже, че във всяко равномерно пространство по естествен начин може да се въведе топология, при това напълно регулярна, и че, обратно, всяко напълно регулярно топологично пространство може да се превърне в равномерно пространство. Голямата заслуга на Вейл се състои в това, че той показа, че една голяма част от теорията на метричните пространства, по-специално така нареченото допълване на метричните пространства, може да се пренесе почти без изменения за равномерните пространства, а това ще рече за всички напълно регулярни топологични пространства.

Въвеждайки равномерните пространства, Вейл нарече едно съответствие f на дадено равномерно пространство X' в друго равномерно пространство X'' равномерно непрекъснато, ако за всяко V от равномерната структура F'' на пространството X'' съществува такова U от равномерната структура F' на пространството X', че $f(U) \subset V$. Лесно се вижда, че в случая на метрични пространства се получава познатото ни от по-рано понятие за равномерна непрекъснатост. По този начин достигаме до ново обобщение на понятието равномерна непрекъснатост, при това обобщение, съществено различно от онова, до което дойдохме чрез въвеждането на понятието близостна непрекъснатост, тъй като съществуват съответствия, които са близостно непрекъснати, без да бъдат равномерно непрекъснати в смисъла на Вейл.

Разбира се, не можеше да се счита задоволително това положение, при което топологичните, близостните и равномерните пространства бяха предмет на изучаване на три различни теории, изграждани независимо една от друга и построени всяка от тях върху своя собствена система от аксиоми. Въпреки това трябваше да минат повече от двадесет години от появяването на първите работи върху близостните и върху равномерните пространства, преди да бъде направен опит за обединяването на тези три теории в една. За пръв път една единна теория на топологичните, близостните и равномерните пространства бе осъществена едва преди няколко години от унгарския математик Часар [13]. През

1962 г. френският математик М. Хак [14] предложи своя единна теория, която обаче, макар и изложена по друг начин, се оказа еквивалентна на теорията на Часар.

В една своя работа [15] аз посочих един друг път за построяване на единна теория на топологичните, близостните и равномерните пространства — път, който за разлика от Часаровия и този на Хак притежава тази особеност, че при него напълно се запазва онази концепция за понятието равномерност, която познаваме от класическия анализ. Аз бих искал да разкажа тук накратко в какво се състои този път.

Нека X е едно произволно множество и нека с $P(X)$ означим множеството от всички негови подмножества, а с $I(X)$ — множеството от едноточковите подмножества на X. Нека освен това бъде дадено едно множество M от подмножества на X такова, че $I(X) \subset M \subset P(X)$. Ще казваме, че в множеството X е въведена една топология в широк смисъл или по-точно топология относно множеството M, ако е дадена една фамилия Σ от съответствия на множеството M в множеството $P(X)$, удовлетворяваща следните условия:

1. $A \subset U(A)$ за всяко $A \in M$ и за всяко $U \in \Sigma$;

2. ако $U \in \Sigma$ и $V \in \Sigma$, то за всяко $A \in M$ съществува такова $W \in \Sigma$, за което $W(A) \subset U(A) \cap V(A)$;

3. ако $U \in \Sigma$, то за всяко $A \in M$ съществува такова $V \in \Sigma$, че когато $B \subset V(A)$ и $B \in M$, може да се намери някое $W \in \Sigma$, за което $W(B) \subset U(A)$.

При това, ако X' е пространство, в което е въведена топология Σ' относно някое множество M', а X'' — пространство с топология Σ'' относно M'', то едно съответствие f на X' в X'' ще наречем непрекъснато, ако от $A \in M'$ следва $f(A) \in M''$ и ако освен това за всяко $V \in \Sigma''$ и за всяко $A \in M'$ може да се намери такова $U \in \Sigma'$, че $f(U(A)) \subset V(f(A))$.

В случая, когато $M = I(X)$, получаваме, както не е трудно да се види, понятието топологично пространство. Ако пък $M = P(X)$, се получава едно обобщение на понятието близостно пространство. За да получим аксиомите на близостните пространства, трябва да прибавим още и едно условие за симетрия, а именно:

4. ако $A \in M$ и $B \in M$ и ако за някое $U \in \Sigma$ имаме $U(A) \cap B = \emptyset$, то съществува такова $V \in \Sigma$, за което $V(B) \cap A = \emptyset$.

В този случай въведеното по-горе понятие за непрекъснато съответствие съвпада с понятието близостна непрекъснатост.

Да обърнем внимание на обстоятелството, че в условията 2. 3. и 4. се изисква съществуването на някакви съответствия от Σ, които обаче могат да зависят от избора на елементите A или B от M. Ясно е, че ще стигнем до една нова система от аксиоми, ако, така да се каже, „униформизираме“ горните условия, като поискаме тези съответствия, за чието съществуване се говори в тях, да не зависят от избора на елементите A или B. Разбира се, на подобна униформизация се поддава и дефиницията за непрекъснато съответствие. Специално в случая, когато $M=I(X)$, униформизираните условия 1.—4. ни довеждат до Вейловото понятие за равномерно пространство, а униформизираната дефиниция за непрекъснатост — до Вейловото понятие за равномерна непрекъснатост.

Струва ми се, че сега, в светлината на тази схема, става ясен смисълът на онази моя забележка, която направих по-горе по повод на двете различни обобщения на понятието равномерна непрекъснатост. Сега се вижда, че именно Вейловото понятие за равномерна непрекъснатост би трябвало да се схваща като естествено обобщение на обичайното понятие за равномерна непрекъснатост, тъй като именно то се получава от понятието за непрекъснато съответствие между топологични пространства посредством една униформизация в духа на класическия анализ, тогава, когато до понятието близостна непрекъснатост ние достигаме по друг път, при който липсва този елемент на униформизиране.

В заключение бих искал да изтъкна, че взаимоотношенията между топологичните, близостните и равномерните пространства все още са сравнително слабо изучени и ние можем да се надяваме, че едно по-дълбоко вникване в тези въпроси ще ни доведе до нови резултати, които ще способствуват за по-нататъшното развитие на общата топология.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bolzano, B. — Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegensetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt. Ostwald's Klassiker, № 153, Leipzig, 1905.
2. Cauchy, A. L. — Cours d'analyse (Analyse algébrique), Oeuvres, sér. 2, t. 3, Paris, 1882.
3. Fréchet, M. — Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rend. Palermo, XXII (1906), 1—74.
4. Riemann, B. — Uber den Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Werke, Leipzig, 1902.
5. Hilbert, D. — Uber die Grundlagen der Geometrie. Math. Ann., **56** (1902) 381—422.
6. Hausdorff, F. — Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
7. Kuratowski, K. — Sur l'opération A de l'analysis situs. Fund. Math. **3** (1922), 181—199.
8. Heine, E — Über trigonometrische Reihen. Journ. für d. reine und ang. Math., LXXI (1870), 353—365.
9. Riesz, F. — Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. Atti del IV Congr. Intern. dei Matem., Bologna (1908), II, 17—24.
10. Ефремович, В. А. — Геометрия близости. Мат. сб., **31** (1952), 189—200.
11. Смирнов, Ю. М. — О пространствах близости. Мат. сб., **31** (1952), 542—574.
12. Weil, A. — Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Paris, 1937.
13. Császár, A. — Fondements de la topologie générale. Paris, 1960.
14. Hacque, M. — Sur les E-structures. C. R. Acad. Sc. Paris, **254** (1962), 1905—1907, 2120—2122.
15. Дойчинов, Д. — Об единой теории топологических пространств, пространств близости и равномерных пространств. Докл. АН СССР, **156** (1964), № 1, 21—24.

Постъпила на 21. V. 1964 г.