Година XVII 1920/21 год.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математически факултет

Идеи и методи в геометрията.

(Встжпителна лекция, четена на 5.IV.1920 г.)

от

Д. Табаков.

Почитаемо сжбрание,

1. Известно Ви е, че предмета на настоящата ми лекция ще бжде „Идеи и методи в геометрията", но бжрзам да заявя предварително, че тази тема ще бжде разгледана от историческо гледище. Освен това нека обжрна вниманието на почитаемото сжбрание, че всека метода вжв геометрията почива на известна идея, обаче една идея може да се приложи сжс различни методи. Успехитѣ на геометрията са продукт на прокараните идеи и методи вжв различни епохи. Главната ми цел ще бжде да се изтжкне силата на методите, които се основаха на общи идеи и дадоха вжзможност да се постигне една простота и общност на принципите. Всеки представител, школа или епоха ще се застжпи сжобразно заслугите вжв казаната смисжл.

Пжрви период.

2. Зачатжци от геометрията се намират у халдейците, египтяните, индийците и китайците.

Талес (639—548) основа школа вжв Милет, от която излезоха основателите на различни философски школи вжв Гжрция, дето станаха пжрвите успехи на геометрията.

3. Платон (430—347), ученик на Питагора, вжведе вжв геометрията аналитичния метод, коничните сечения и учението за геометричните места.

Изобщо гжрците употребяваха два метода: анализ или решение и синтез или сжставяне. Тези две думи имаха вжв математиката строго определена смисжл.

Чрез синтеза се тржгва от познати истини, за да се дойде, като се преминава от следствие на следствие, до предложението, на което се иска доказването или на решението на предложената задача.

При анализ се взима като истина тжрсеното предложение, или като решена предложената задача и се преминава от следствие на следствие, до като се дойде до некоя позната истина, която ни дава вжзможност да заключим, че предложението, допустнато като истина, е действително такова или която истина позволява построението на задачата или невжзможността й.

Платон и неговите ученици приложиха успешно тези методи за изследване главните свойства на коничните сечения, които, след две хиляди години, започнаха да играят велика роля вжв небесната механика, когато Кеплер и Нютон откриха небесните тайни.

4. Един от пжрвите бележити геометри на древността, който даде пжрвия математически блесжк на пжрвата Александрийска школа, е Евклид (330—275), знаменития автор на сжчинението „Геометрични елементи". Заслугите на Евклида могат да се изброят вжв следните точки:

1) Сжбра разхвжрлените получени елементи;

2) Тури вжв ред много неща, намерени от Eudoxe;

3) Усжвжршенствува всичко започнато от предшествениците му;

4) Доказа строго онова, което беше слабо изложено преди него;

5) Евклид вжведе в геометрията метода наречен Reductio ad absurdum или доказателство за невжзможността на противното предложение. С една реч той изложи систематично вжв това сжчинение всички добити резултати преди него. Той джлжи славата си и на други сжчинения, но ние ще се задоволим само сжс тези бележки относно този виден застжпник на геометрията. Обаче нека се забележи, че методата на анализа у старите е метода на откритие. Синтетично се излагаха принципите на една наука, както например, в елементите на Евклида.

5. След Евклид се яви Архимед (287—212) — математик с удивителен ум. За пржв пжт той определи точно, по два различни начина площта на един параболичен сегмент, други

площи, обеми на тела; приблизително изчисли π и др. Всички тези резултати са за винаги паметни открития на Архимеда.

Начина. по който Архимед постигна доказването на тези нови и мжчни истини, носи името метода на „изчерпването". Тя се сжстои вжв това, че се хваща площта на фигурата като граница на площта на вписаните и описаните многожгжлници относно фигурата.

Друга слава на древността е Аполониус (III в. пр. Хр.). Той написа осем книги вжрху коничните сечения. У него, за пржв пжт, тези криви са добити от един наведен кржжен конус. В основата на изследванията му лежи едно свойство на коничните сечения, което твжрде изкусно използвано, играе роля на уравнение сжс две променливи от втора стжпен вжв систамата на Декарта. Най-хубавите свойства на коничните сечения беха предмет на изследванията му. Вжв всичките му творения изпжква проницателност и гжвкавост на ума. Той приложи геометрията в астрономията.

6. Евклид, Архимед и Аполониус са тримата най-велики математици от пжрвата, „Александрийската", школа и изобщо на древността. Те сжздадоха най-светлата епоха на старата геометрия. И на тримата гениите се проявиха вжв различни направления, които сплотени дават една хармония на геометрията. Пжрвият е велик систематизатор, другият несравним гениялен ум, който извжршваше операции сждржкащи зародишите на инфинитезималните изчисления, а третият подготви талантиво пжтя за развитието на чистата геометрия. След тех настжпи известен успех в астрономията за сметка на геометрията. Според преценката на Chasles това се джлжи на факта, че тези открития изискваха изучване преди да бждат надминати. Края на пжрвото столетие след Христа, би требало да се смета последен етап на успехите, извжршени в областта на математиката от старите народи.

7. Четири столетия след Христа се яви Papus сжс своите „Математически колекции", Това сжчинение е ценен паметник от гледна точка на историчното развитие на математиката у старите и ни дава ценни сведения за нейното сжстояние.

Вжв този труд на Papus'а се срещат следните забележителни теореми: за двойното или ахармонично отношение, хармоничните свойства на пжлния четиристранник, теоремата за шестожгжлника, на който 6-тех вжрха са вжрху две прави, друга една обща теорема, от която произтичат тези на Pascal и Desargues.

Чудно е, че тези резултати, които биха могли да бждат основа на широки изучвания, сжс течение на векове не са били преценени и използувани. Това обстоятелство потвждява една хубава и справедлива мисжл на Bailly: „Изглежда, чи идеите преживеват, като хората, едно детинство и едно пжрво сжстояние на слабост; като че времето, което е нужно да олегнат, им дава сжответна мощ и плодовитост".

8. С Proclus и Eutocius (412—540) се завжршва последния блесжк на Александрийската школа. Изкуствата и науките отслабват когато арабите завладеват Египет (641 г.) и изгарят знаменитата библиотека, която сжхранява ценното сжкровище на целата духовна култура, сждадена за десет века от гения на древността (300 г. г. пр. Хр. — 641 г. г. сл. Хр.)

Втори период.

9. След това скржбно сжбитие за науките настжпи, вжв всички нации, едно затишие, което проджлжи близо десет века.

В края на петнадесетото столетие почна едно общо раздвижване на науките. Математиката се сжвзема. Успехите отначало са бавни. Но при все това схващанията на геометрите приемат характер на общност и отвлеченост.

Главните открития на геометрията, при нейното вжзраждане, се джлжат на Viète'a и Kepler'a. Сжвжршенно заслужено може да се каже, че те изградиха надмощието на новите времена спремо старите.

Viéte (1540—1603) разработи алгебрата и тригонометрията.

Кеплер (1571—1631), за пржв пжт, употреби безкрайността вжв геометрията. Той усжвжршенства методата на Архемида и я приложи за изчисление обемите на много ротационни тела. Сжщо така на Кеплера се джлжи хубавата метода да се определят моментите на слжнчевото затжмнение на разните точки на земята. Това биде едно гениално приложение на принципа на проектирането, 200 години преди откриването на дескриптивната геометрия.

10. През седемнадесетото столетие се явиха Робервал, Ферма, Декарт, които отвориха нови пжтища. Този век е епоха на най-светлите открития.

Тези трима знаменитости си разделиха славата, че решиха всеки, по различен начин, една задача, която никой геометжр не имà достатжчно смелост да атакува досущ, общо. Това е задачата за тангентите кжм кривите линии. Тя необходимо предхождаше откритието на диференциалното сметане.

Методата на Робервала (1602—1673) се основава на учението за сжставното движение, което Галилей откри и вжведе вжв механиката. Този геометжр не беше щастлив да сжзре всички следствия, които биха могли да се изведат от методата му. Вжв всеки случай, тази нова идея му извоюва почтенно место в историята на математичните открития.

11. Ферма (1590—1663) изложи едно решение за тангентите кжм кривите, като се осланя на методата за максимума. Този виден математик обладаваше щастлива философска идея, но не даде една сполучлива символична форма, която да служи като могжщ инструмент, приложим вжв всички случаи.

Той изчисли площи, обеми вжв по-сложни случаи от тези разгледани от Архимеда и по този начин царя на геометрията биде надминат.

12. Паскал (1623—1662) приложи строго изчерпателната метода на Архимеда за площите, обемите и др. Тези изследвания са образец за силата на човешката мисжл и тангират сжс принципите на интегралното сметане; те са вржзката между Архимед и Нютон.

Работите му вжрху теорията на коничните сечения привличат сжщо така нашето удивление вжв тази област. На 16 годишна вжзраст той написа „Traité des sections coniques".

В пжрвата част на това сжчинение е изложена методата му, която почива вжрху перспективния принцип. Втората сждржа свойствата на вписания шестожгжлник.

Вжз основа само на тази теорема Pascal изведе неколко стотици следствия. Такова е преимуществото на новите методи, спремо старите, които не ни дадоха подобни примери.

13. Desargues (1593 - 1662) биде достоен учител на Pascal. Той разработи сжщо така теорията на коничните сечения. Неговият метод има нещо общо сжс този на Pascal, но сждржа и нови принципи.

В 1639 г. излезе съчинението му:

„Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan". За него се споменава във много писма на Декарта.

Това съчинение съдържа нови предложения и във него владее една нова метода, която почива на забележката, че коничните сечения, добити от кръжния конус, треба да обладават свойсгвата на тази фигура.

Desargues вмъкна две нововъведения: равнината на сечението е произволна, а не както у старите; той се постара да пренесе свойствата на окръжността на коничните сечения. Тази метода му позволи да създаде общи схващания във геометрията. Той разгледа, като разни видове от една и съща крива, различните сечения на конуса: окръжност, елипса, парабола и система от две прави, които случаи до тогава се разглеждаха отделно.

Декарт ни дава сведение, че Desargues е схващал една система успоредни прави като сноп прави в една равнина със център на крайно разстояние. На тази идея на Дезарга обърнаха внимание Лайбниц и Нютон, които приеха тази дефиниция на успоредните прави. Тази идея за времето на Desargues беше и нова и оригинална.

Идеите на Desargues, засегащи системите прави, сравнени със кривите линии, са го довели по един естествен път да приложи на коничните сечения разни познати свойства за системата от двете прави линии.

Една забележителна теорема от подобно приложение е тая, която и днес във Геометрията носи името на Desargues или „инволюция на шест точки". Тази зависимост може да служи за изходна точка във теорията на коничните сечения.

Теорията на Desargues е от такова естество, че му позволи да разгледа коничните сечения по най-общ начин. Pascal и Fermat признават съчинението на Desargues като оригинално, с общност откъм приложенията и което е внесло същевременно леснота във работата.

Desargues и Паскал подигнаха един друг въпрос, който не вълнуваше старите гърци. Те поискаха да знаят дали всички конуси, които имат за база едно конично сечение, са идентични на тези, които имат за основа окръжност и при това да се определи положението на тази равнина. На този вжпрос се отговори утвжрдително.

На Desargues се джлжи теоремата за два хомологични △-ка. Poncelet, вжв хубавата си теория за хомологичните фигури, ѝ даде основно место.

Този геометжр приложи идеите и методите си не само вжв чистата геометрия, но и вжв перспективата и специално за сечение на камжнете.

Геният на Desargues упражни влияние, поне в областа на геометрията, на Декарта Паскаля и Ферма. Poncelet преценни справедливо тоя даровит геометжр, като го нарече „Monge de son siècle".

14. Grégoire de sain-Vincent (1584—1667) е забележителен представител, който се смета предшественик на Нютона и Лайбница, а вжв геометрията вжведе разни методи за трансформиране на една фигура вжв друга. Тези преобразувания ни дават вжзможност да схванем една и сжща истина от разни гледни точки.

Трети период.

15. Духа на методите, прокарани в откритията на Desargues и Паскаля, се прояви едва едно столетие по-кжсно. Това неочаквано явление се обяснава сжс появяването на Декарта (1596—1650), който даде ново направление вжв развитието на геометрията. Този философ, чрез своята идея за приложението на алгебрата вжв геометрията, сжздаде средство да се преодолеят всички мжчнотии и по този начин измени лицето на математиката.

За да се сжди за Декарта, да се види това, което ума само на един човек даде на човешкия дух, треба да се види точката, отдето той тржгна. Като се изучва неговото влияние ще се види, че човечеството биде смутено от неговата силна оригинална мисжл и почна да се сжбужда, С една реч човешката мисжл се раздвижи вжв цела Европа.

Един човек, който има смелостта да катурне миналото, достатжчно гений да го настрои на ново, доволно ум да тури сигурни основи, сжс достатжчен блесжк да облее своя век и прекрати обаянието на миналите векове. Един човек, надарен сжс всички качества да сжбере всички плодове на миналото и да раздруса света. Човек с активен гений, който виждаше там, дето никой друг не виждаше. Той показа и целта и пжтя. Това призвание се падна на Декарта.

Появяването на Декарта сжвпада с онова време на историята, когато света започна да се сжбужда и дух за откритие вжодушевяваше всички народи. Това раздрусване се предава на науките:

Коперник, Тихо де Браге, Кеплер, Галилей направиха големи проломи за големи открития на небето. Бекон разчлени човешките знания и ги подложи на критика. Ето условията, които природата сжздаде преди раждането на Декарта.

Пжтуванитя му вжв разните страни спомогнаха да вжзприеме много впечатления, които вжзвишиха душата му и разшириха идеите му Неговото пословичню сжзерцание може да се смета сжщо така като един важен елемент на творчеството му.

Декарт изучваше всички науки, без да тжрси там сигурността на геометрията. Нему се джлжи сжздаването вжтрешната логика на душата, чрез която той осигури всички принципи на знанието си и поиска да се впусне в изучване на физичния свет, след като предварително усжвжршенствува геометрията като необходим нему инструмент.

Алгебрата беше сжздадена отдавна от арабите, италиянците и усжвжршенствувана от Viète'a. Предварителто той упрости алгебричния й механизжм.

Методите на Аполониуса и Архимеда беха малко полезни за откритията. Те приличаха на онези машини, които изразходват много горивен материал, без да се получава максимум движение; те влачеха ума бавно от една истина на друга. Имаше се се нужда от една по-бжрза метода; беше необходим един инструмент, който да издигне геометра на една височина, отдето той може да види всички свои операции, без да уморява взора си; да сведе разнообразието в един принцип, в една точка: това е инструмента на Декарта, това е приложението на алгебрата вжв геометрията. Cavalieri, Fermat, Roberval, Grégoire de saint—Vincent имаха сжщо така общи идеи, обаче без да им дадат едно обширно приложение. Декарт отвори пжтя на новите изчисления, понеже самата му метода имаше универсален характер.

Декарт започна да представя геометричните фигури с алгебринни уравнения и обратно да им дава геометрично тжлкуване. Сжс тази метода геометрията придоби нечувани успехи. Работата се сжкрати, силите се умножиха, даде сез нов ход на математичната мисжл. Анализа стана инструмент за всички велики открития. Анализа, вжч ржцете на умове като Лайбниц, Нютон, Бернули, прозведе новата великолепна геометрия. Ето делото на Декарта. Този изключителен ум надмина миналотс и отвори изходи за идните столетия.

Едно обстоятелство, което показва най-добре обширния ум на Декарта, е, че той е пжрвият, който схвана великата идея да обедини всички науки, като си служат една на друга по пжтя на еволюцията им. Той показа това примерно, като сжедини алгебрата, геометрията, механиката, астрономията, физиката и др.

Този знаменит мислител сжбуди заспалия дух на вековете. Робската мисжл се отжрсва от веригите си, като се вжздигна принципа, че здравата мисжл се намерва вжв душата на всеки човек. Почна се силно изучването на природата, а не философията на Египет, Индия и Персия. След него един и сжщи план и ржководен творчески принцип вее вжв Франция, Италия, Германия и Англия. Всички науки напредват. Математиката стана повече плодовита, а методите ѝ прости. Големото влияние на Декарта може да се изрази, като се каже, че той отвори пжтя на истините, открити от Pascal, Лок, Нютон, Хюйгенс, Спиноза и Монтескйо.

Правилата на Декарта, които треба да ржководят ума в изследванията на истината, могат да се резюмират приблизително така: „Вие не ще намерите истината без метод; меметода се сжстои вжв реда; реда се сжстои да се сведат сложжните предложения на по-прости. Желаете ли да изострите вашия ум и го приготвите един ден да открива сам, упражжнете го пжрво вжрху това, което са открили другите. Следвайте най вече откритията, дето има ред и строга зависимост между идеите“.

16. De Witt (1625—1672) упрости аналитичната теория на геом. места вжв геом. на Декарта. Освен това той даде зачатжка на знаменитото органическо описване на коничните сечения според Нютона.

Wallis (1616—1703) написа за пржв пжт Traité analytique des sections coniques, според принципите на декартовата геометрия.

17. Хюйгенс (1629—1695), макар да владееше отлично ме тодата на Декарта, остана верен на тая на старите. Неговия гений е триумфирал на най-големите мжчнотии. Сжчинението му De horologio oscillatorio, вжв което се намерва теорията з развивките, е едно от най-хубавите открития на модерната ге ометрия и законите за центробежната сила — две теории, които Нютон използва артистично вжв безсмжртното си сжчинени „Математични принципи на природната философия". Сжс чудна проницателност той приложи геометрията вжв теорията на свет лината. Тези трудове са основа за други изследвания от сж щото естество на Quetelet, Malus и хубавите открития н Charle Dupin.

18. Професор Barrow (1630—1677), учителжт на Нютона издаде вжв 1669 сжчинение пжлно сжс хубави и джлбоки мисли при изследваието на кривите. Вжвеждането на две безкрайно мал и величини, вместо една, в изчислението се джлжи нему Стед този успех остана една крачка до откритията на Нютона и Лайбница.

19. La Hire (1640—1718), в своето сжчинение за конус ните сечения, прокара принципите на Desargues и Паскаль по един оригинален начин и поради това вжпросното сжчи нение му спечелило на времето един всеобщ авторитет.

Той установява хармоничните свойства и преминава на тези вжв коничните сечения вжз основа на проективните прин ципи. Образувателната дефиниция на коничните сечения спрямо фокусите и директрисите се джлжи сжщо така нему.

La Hire измисли едно друго образуване на коничните сечения посредством окржжността. Тази теория сджржа на пжлно теорията на хомологичните фигури, изложена от Pon celet вжв неговото класично сжчинение.

Сжвременно сжс La Hire, Нютон (1642—1727) показа как може да се трансформира едно конично сечение в окржжност и по този начин се упростяват сложните задачи.

Parent (1666—1716) представи повжрхнина чрез едно урав нение сжс три променливи и сжс това се разширяват идеите на Декарта.

20. Clairaut (1713—1765) изложи за пржв пжт система тично по един методичен начин употреблението методата на Декарта вжв пространството, като приложи координатите на по вжрхнините и кривите сжс двойно закривление.

Четвърти период.

21, Лайбниц (1684) и Нютон (1687) изработиха принципите на диференциалното смегане. Това великолепно откритие замести с едно колосално преимущество методите на Cavalieri, Roberval, Fermat и на Grégoire de saint-Vincent. След тези открития анализа направи прекомерно развитие.

22. Mac-Laurin (1698—1746), насърдчен от хубавите Нютонови открития относно алгебричните криви линии, които беха само произнесени, създаде работи от първостепенно значение. Заслугата на Mac-Laurin'a се състои във това, че той разбули двете теореми на Нютона върху тези криви.

23. Euler (1707—1785), във своето прочуто съчинение „Introductio in analisin infinitorum (1748), изложи главните принципи на аналитичната теория на алгебричните криви с една общност и ясност, която характеризира съчиненията на този велик геометър.

За пръв път, той разгледа аналитично общото уравнение на повърхнините от втора стъпен.

Пети период.

24. През осемнадесетото столетие всички математици се отдадоха на анализа и затова вкуса към геометричните изследвания бе угаснал, с изключение на некои отделни въпроси, разгледани от знаменитите математици Euler, Lagrange и др.

След една почивка от един век на геометрията, яви се Monge (1746—1818), който създаде нова ера в историята на математиката. Трудовете му се появиха в един момент, когато се верваше, че областта на геометричните изследвания приблизително се свършва след откриването на диференциалното сметане. Със Monge и Carnot се почнаха поразителните успехи на геометрията. Новите пътища на изследванията им подновиха във широки размери математиката.

Получените резултати ни изтъкнаха една верна мисъл, какво общите методи не са всичките във науките и че във найпростия сюжет има много да се извършва от един гениален и творчески ум.

Хубавите геометрични открития на Huyghens, Newton, Clairaut беха забравени. Гениалните идеи на Desargues и Pascal беха също така, едва ли не, останали във мрака.

Carnot (1753—1823), със съчиненията си Essai sur les transversales и Géométrie de position (1803), а Monge със своите Géométrie descriptive (1793) и Application de l'analyse à la géométrie (1805), дадоха един блескав полет на геометрията. Общият характер във творческата мисъл на Monge'a подчерта истината, че съюза на геометрията и анализа е полезен и плодовит, че тази връзка е, може би, едно условие за успеха на геометрията и анализа.

Нека разгледаме вмъкнатите методи във геометрията от Monge.

1. Дескриптивната геометрия на Monge'a почива върху принципа на ортогоналното проектиране. Самото естество на този принцип ни дава нови средства за геометрични изследвания.

2. От епюра, получен от пространствените фигури, Monge получава друга фигура, като си служи със перспективния принцип, Така че от всеко свойство може да получи по-обща форма. Това е методата на Monge'a за трансформиране на фигурите.

3. Monge наведе много примери, дето планиметрични теореми се доказват извънредно лесно посредством стереометрични разглеждания. Учениците му изградиха във по-стройна система тези идеи на учителя си.

4. Принципа на хомологичните фигури се явява като едно необходимо следствие във дескриптивната геометрия.

Методата на Monge'a за трансформиране на фигурите ни дава с един бърз замах плодовете на La Hire върху същите въпроси. Ето защо, творенията на Monge'a съставят богат източник на идеи, методи и истини. И поради това обстоятелство, той е бил обаяние на своята епоха и създаде цела школа. Lagrange, не без основание, е казвал, че Monge със своята геометрия ще стане безсмъртен. Със дескриптивната си геометрия, Monge координира не само геометричните операции във всичките изкуства, но, освен това, той създаде и една чиста геометрия със малко принципи, богати по следствия, еластични и изобилни със нюанси от гледна точка на приложението.

Във другото си съчинение L'application de l'analyse à la géométrie той изложи по аналитичен начин хубави и нови идеи, които се считат за основи на диференциалната геометрия.

25. От училището на Monge'а излезоха много геометри, от които най-видно место заемат Brianchon, Binet, Poncelet, Chasles и др. Можду тех пжрво место заемат Poncelet (1788—1867). Този геометжр се предаде изключително да развие зародишите, сждржащи се вжв чистит: геометрични изследвания на своя учител.

В 1822 г. излезе знаменитото му сжчинение „Traité des propriétés projectives des figures“ и приблизително вжв сжщото време се появиха неговите „Mémoires sur les polaires réciproques et sur les moyennes harmoniques. Вжв тези сжчинения се изложи, по-най-елегантен начин, теорията на хомологичните фигури и реципрочните поляри, Тези плодовити идеи на Poncelet дадоха материал за петдесетгодишно еволюиране на геометрията. Една плеада от геометри се явиха да изучат от всички страни принципите, използувани, тжй пленително, от майстора им.

Хомологичните фигури вжв равнината беха известни, а вжв пространството не беше разширен сжщия принцип, нито пжк схващаха неговото могжществено значение и плодовитост. Оригиналните идеи на артиста геометжр Poncelet се излеха с ослепителна светлина и Gergonne, редактор на Annales de Matlhèmatiques (1810—1831), биде изненадан.

Като вжведе теорията на реципрочните поляри, Poncelet получи много предложения от сжвсем ново естество.

Gergonne имá, за пржв пжт, щастливата идея да формулира принципа за дуалноста, като написа реципрочните предложения вжв двойни колони.

Чрез полемиката на Poncelet, Gergonne и Plücker, този принцип биде достатжчно ясно и здраво изложен.

Chasles хвжрли доволно светлина вжрху двата принципа на Poncelet вжв сжчинението си: „Memoire sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homograhie, 1837 г.

26. Chasles и Steiner, които посветиха живота си на чисто геометрични изследвания, които усвоиха в общи черти тенденцията на Poncelet, се помжчиха да поставят този клон от математиката на самостоятелна нога,

Chasles прокара вжв своите сжчинения четири основни точки, като бé убеден, че те ще дадат един прогрес вжв геометрията. Тези четири приннипи беха: знаците, имагинерните елементи, дуалния принцип и двойното отношение. Този геометър изучваше усърдно хомографията и корелацията, Въз основа само на един принцип, той откри една серия хубави свойства на хомофокалните повърхнини от втора стъпен.

27. Steiner, велик и дълбок геометър, следва, като Chasles, пътя на чистата геометрия.

Два са главните принципи, които го ръководиха. Тѣ са:

1-о Теоремата на Desargues;

2-о Образуването на кривите и повърхнините от по-височка стъпен със помощта на снопове и мрежи от криви или повърхнини от по-малка стъпен.

28. Bobillier и Plücker(1830) работят едновременно със Chasles и Steiner в областта на аналитичната геометрия. Те създадоха методата „съкратени означения". В една редица трудове на Plücker'а се изложи методата на тангенциалните и трилинейни координати, употребени в омогенните уравнения. Всички тези щастливи идеи и методи влеха пресна кръв в аналитичната геометрия и тя прие образ, какъвто днес притежава.

29. След това настъпва един блестящ период за геометричните изследвания от всеко естество. Otto Hesse оперира по един незаменим начин с омогенните координати и усъвършенства методата на Plücker'а, който не можà да даде такава ценност на своето откритие. Hesse откри по аналитичен начин много елегантни свойства на повърхнините от 2-а стъпен. Plücker, като разглеждаше свойсвтата на две криви, реципрочни поляри една на друга, откри своите формули.

Steiner, Cayley, Salmon, Cremona изучават едновременно повърхнините от 3-а стъпен и техната теория става лесна, като тая на повърхнините от 2-ра стъпен. Chasles и Cayley атакуват изучването на алгебричните линейни повърхнини и работите им упражняват влияние на Cremona, Salmon, La Gournerie.

Plücker, Steiner, Kummer, Cayley, Moutard, Luguerre, Cremona със голема сила атакуват специалните случаи на повърхнините от четвърта стъпен.

Halphen и Noether усъвършенствуват теорията на алгебричните криви във пространството.

Двете важни методи, за трансформиране на фигурите, хомографията и корелацията, са изходната точка на всички предидещи изследвания. Тези методи се обобщиха, като се изтъкна, че те не са единствените, които дават възможност да съответствува на един геометричен елемент само един елемент от същото естество и обратно. Plücker въведе трансформацията, известна под името „инверсия“.

Видният италиански геометър Cremona посочи пътя на една серия бирационални трансформации, поне за равнинните фигури.

30. Знаменитата теория на Ponceiet за описаните и вписани многоъгълници, относно две конични сечения, даде щастливата идея на Jacobi да приложи елиптичните функции за доказателство на същата теорема.

Clebsch е първият математик, който обърна вниманието за важността на понятието (genre) „род“ на една алгебрична крива и доби по един естествен път множество свойства, като приложи абеловите интеграли.

Във същото време чистите геометри не бездействуват. Toinsot, Chasles и Steiner доказаха, за лишен път, при изучването привличането на елипсоидите, че геометрията може да третира, със безподобна леснина, най-мъчните въпроси от интегралното сметане. До тук всички тези изследвания могат да се сметат като отдалечени следствия от методата на Monge'a и Poncelet.

31. В 1847 год. видният колос на модерната геометрия v. Staudt издаде съчинението си „Geometrie der Lage“, а във 1856 год. публикува труда си „Beiträge zur Geometrie der Lage“. Със тези два магистрални труда този геометър осъществи напълно хубавите мечти на Chasles и Steiner да се постави геометрията на самостоятелна почва.

32. След опитите на Poinsot, Möbius, Chasles и Kummer, Cayley въведе понятието за координати на кривата. Plücker изгради едно методично изучване на комплексите. Обаче тази му заслуга не е нищо спремо откритията му във тази област. Във тези си иследвания той дойде до заключение, че не само точката, равнината, правата могат да се сметат елементи на пространството. Ето един нов и голем простор на идеи и нови полета за работа.

33. До тук не бе казано нищо за развитието на диференциалната геометрия след Monge. Виден представител от школата на Monge'a е Charles Dupin, който следва всички отворени пътища на своя учител. Във говия труд „Développements de Géométrie“ 1813, той въведе понятитео за индикатриса и там

се намерва теоремата вжрху тройно ортогоналните системи която носи днес неговото име.

В 1827 год. се появи сжчинението на Gauss'a „Disquisitiones generales circa superficies curvas“, което има решително значение в историята на диференциалната геометрия. Една плеада от геометри—Frenet, Bertrand, Bouquet, Puiseux, Ossian Bonnet, Liouville и др.—изучваха методично този мемоар. Всеки от тези геометри даде по нещо за развитието на геометрията вжв духа на Gauss'a. Ribaucour, Halphen, S. Sie обогатиха найвиссшата теория на повжрхнините. Weierstrass установи вржзка между минималните повжрхнини и функциите.

Lamé, Cayley, Darboux, Ribaucour сжздадоха една великолепна теория на тройно ортогоналните системи. Вжв тези системи се прилагат еднакво чистата геометрия, аналитичната геометрия и диференциалната геометрия. Между методите, които са позволили да се установят главните резултати вжв теорията на повжрхнините, треба да се отбележи систематичното употребяване на линейните частни диференцциални уравнения от втори ред.

34. В 1870 г. Sophus Lie направи достояние на науката едно откритие, крайно забележително, интересно и на пржв поглед невероятно, Той измисли една особена трансформация, чрез която една права се трансформира вжв сфера и обратно една сфера вжв две прави. Това откритие е епохално и осжществи на дело идеите на Plücker'a.

Sophus Lie сжздаде теорията за допирателните трансформации, сжс които се хвжрли светлина вжрху най-мжчните и тжмни страни вжв теорията на частните диференциални уравнения от по-висок ред. Вжв сжщото време той сжздаде непрекжснатите трансформачни групи и явно постави важната роля, която играе понятието за група вжв геометрията.

35. След чудното разширение, което математиката получи през 18 столетие, беше необходимо да се организират нейните, обширни и бжрзи победи и да се дойде до принципите, отдето се е тржгнало, да се закрепят и координират началата й. Вжв сжщото време, вжв което науката преследваше нейното бжрзо развитие, намерваха се учени сжс критически ум, които извжршваха преглед вжрху основите й и я построяваха наново вжрху по-солидни начала, т. е. успехите на математич-

ната критика се отнасяха до предмета и логичната форма във развитието на математиката и частно във геометрията.

Критиците контролираха логическата връзка на предложенията и независимостта на аксиомите и постулатите, като се стремяха да сведат броя им до един известен минимум. По този път математиците критици хвърлиха светлина върху тъмните основни принципи на математиката и подготвиха пътя, който ги доведе до триумфа на математичната философия.

От Евклида до Legendre е първият период от еволюцията на този въпрос. През това време (две хиляди години) геометрите се мъчиха напраздно да докажат постулата на Евклида за успоредните прави линии.

През 1815—1832. г. г. Gauss, Bolyai, Lobačevskij основаха неевклидовата геометрия, като допустнаха, без доказателство, че знаменитият постулат на Евклида е независим. Riemann, Klein, Hilbert, Poincaré, Sophus Lie изградиха широко и грандиозно основите на геометрията.

36. Има и други въпроси, които биха заслужили внимание, но момента за привършване наближава. Поради това налага ми се да кажем няколко думи от общо естество за анализа на геометрията. Всичко изложено до тука ни дава основание да формулираме следните общи изводи за математиката и частно за геометрията.

1-о. Като всека наука, така и геометрията, под влиянието на новите идеи и методи, подлежи на еволюция.

2-о. За прогреса на една наука не са достатъчни щастливи, оригинални, еластични и със нюанси идеи, но и на тех да отговарят общи и леки методи. Най-после хубавите идеи и методи си отварят обятията на тези, които виждат широките размери на приложението им.

3-о. Под влиянието на еволюцията, рамките, във които е поставена една наука, през известна епоха, се пукат: старите въпроси ни се представят под нова форма; нови задачи се поставят, на които изучването хвърля светлина върху тъмни страни на анализа и геометрията. И най-великолепните творения, под влиянието на еволюцията на човешката мисъл, губят от първоначалния си блесък.

4-о. Въпреки, че анализа завладява душите на всички математици, нека не се забравя едно безпорно обстоятелство:

богатите средства, със които анализа прави проломи, се дължат във значителна стъпен на схващанията, въведени от геометрите.

5-о. Училището на геометрията изтъкна истината, че не треба да се гордеем слепо с общите методи. Всеки отделен въпрос съдържа повече свойства, повече истини, на които отговарят частни теореми. Откритието на специалните предложения съставя 90% от общата прелест на науката. Откритието на тези специфични свойства става, като се прилагат, по един свойствен начин, общите операции, със които, до тоя момент, разполага всека наука. Важността на тази точка требва да се схване с еднакво въодушевление както от математичната младеж, така и от нейните учители.

6-о. Неоспоримо е, че геометрията има собствени преимущества, обаче не требва да искаме да я сравняваме с анализа във всички случаи. Нека, прочее, се разработва геометрията, като се инспирираме от следната мисъл на Pascal'я „Celui qui passe la géométrie nous surpasse".