NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME VII. — ANNÉE 1907

Extrait du N°

IV série t. VII mars 1907

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

mars 1907

На уважаемия проф. Н. Ив. [illegible]

г. Плевен, 3.II.1962 г. Д. С. Табак

QUASI-DÉVELOPPÉES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. D. TABACOFF.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4[e] série, mars 1905, page 97) M. Arthur Maluski a publié des considérations très élégantes sur les quasi-développées des sections coniques. En suivant sa méthode, nous allons étendre ses recherches aux quasi-développées des surfaces de second ordre. Pour définir une quasi-développée d'une surface (S) du second ordre par rapport à une autre surface du second ordre (S'), nous établirons une correspondance univoque entre chaque plan tangent à (S) avec un autre plan. En effet, soit (α) le plan tangent en un point (M) de (S). Ce point (M) a toujours un plan polaire (Π) par rapport à la surface (S'). Appelons (d) la droite d'intersection des deux plans (Π) et (α). Il est évident qu'on peut mener par (M) seulement un plan (α'), parallèle à (d) et conjugué à (α) par rapport à la surface (S'). Il suit de là que, si le point (M) décrit la surface (S), le plan (α') ainsi choisi enveloppera une surface (Q) que nous appellerons *quasi-développée de* (S) *par rapport à* (S'). En nous rappelant que, par définition, (α') passe par le pôle de (α) par rapport à (S'), et que le pôle de (α') par rapport à (S') est un point situé sur le cône circonscrit à la surface (S) et ayant pour base l'intersection de (α') avec (S), nous pouvons aborder l'étude de la surface en question.

T.

L'équation générale d'une surface (S) du second degré en coordonnées tétraédriques est

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} F(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 \\ + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt \\ + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned} \right.$$

Soit

$$(2)\qquad ux + vy + wz + rt = 0$$

l'équation du plan (α').

D'autre part, l'équation du cône circonscrit à la surface (S), et qui a pour base le plan (α'), est la suivante :

Burger comp. 332, 334

Carnoy, t. II.

341, t. II

$$(3)\qquad HF(x, y, z, t) + \delta(ux + vy + wz + rt)^2 = 0,$$

où δ est le discriminant de $F(x, y, z, t)$ et

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$\Phi(u, v, w, r) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface (S'). D'après les explications que nous avons données au début, il faut et il suffit que les coordonnées du pôle de (α') par rapport à (S') satisfassent à l'équation (3). Ces coordonnées sont données par les relations

$$(4)\qquad x = \Phi'_u, \qquad y = \Phi'_v, \qquad z = \Phi'_w, \qquad t = \Phi'_r.$$

La condition cherchée sera

$$(5)\qquad HF(\Phi'_u, \Phi'_v, \Phi'_w, \Phi'_r) + 4\delta[\Phi(u, v, w, r)]^2 = 0.$$

Il s'ensuit que la surface définie au commencement est de quatrième classe.

Remarque. — Si les deux surfaces sont tangentes en un point (M), la surface (5) se décompose en un point (M) et une surface de troisième classe. Si les surfaces (S) et (S′) sont bitangentes, la surface (5) se décompose en deux points et une surface de seconde classe. Enfin, si les surfaces (S) et (S′) se coupent, il est clair que la courbe d'intersection appartiendra à la surface (5).

Rapportons maintenant les surfaces (S) et (S′) à leur tétraèdre conjugué commun, de façon qu'on ait

$$F(x, y, z, t) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$\Phi(u, v, w, r) \equiv a_1 u^2 + b_1 v^2 + c_1 w^2 + d_1 r^2 = 0.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\Phi'_u = 2a_1 u, \qquad \Phi'_v = 2b_1 v, \qquad \Phi'_w = 2c_1 w, \qquad \Phi'_r = 2d_1 r,$$
$$F(\Phi'_u, \Phi'_v, \Phi'_w, \Phi'_r) = 4[aa_1^2 u^2 + bb_1^2 v^2 + cc_1^2 w^2 + dd_1^2 r^2],$$

$$H = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & b & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & c & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & d & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = -abcr^2 - abdw^2 - acdv^2 - bcdu^2,$$

et

$$\delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

Après la substitution de ces valeurs dans l'équation (5), nous obtiendrons l'équation tangentielle de la surface quasi-développée. Son équation sera

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} & cd(aa_1 - bb_1)^2 u^2 v^2 + bd(aa_1 - cc_1)^2 u^2 w^2 \\ & + bc(aa_1 - dd_1)^2 u^2 r^2 + ad(bb_1 - cc_1)^2 v^2 w^2 \\ & + ac(bb_1 - dd_1)^2 v^2 r^2 + ab(cc_1 - dd_1)^2 w^2 r^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

ou

$$(5'')\quad A u^2 v^2 + B u^2 w^2 + C u^2 r^2 + D v^2 w^2 + E v^2 r^2 + F w^2 r^2 = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= cd(aa_1 - bb_1)^2, & B &= bd(aa_1 - cc_1)^2, \\ C &= bc(aa_1 - dd_1)^2, & D &= ad(bb_1 - cc_1)^2, \\ E &= ac(bb_1 - dd_1)^2, & F &= ab(cc_1 - dd_1)^2. \end{aligned}$$

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. VII; mars 1907.)

39859 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.