

**ГОДИШНИК**  
 на  
**СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ**  
 Физико-математически факултет

---

**Характер и проблеми на алгебрата**

от Н. Обрешков

(Встъпителна лекция, четена на 23 октомври 1922 г.)

Г-да професори, г-да студенти,

Необходимостта да се намерят величини директното определяне на които е невъзможно е принудило човешкия ум да търси връзки между тях и познати величини, които непосредствено се определят и от тези връзки да определи неизвестните. Така се е появила математиката. Съставянето на връзките ни дават приложните науки, а тяхното решение, т. е. намирането на неизвестното е обекта на математиката. Първата проблема, конкретната част, е по-специална, понеже е свързана с явлението което се изучава, а втората, абстрактната част, е по-универсална и решението на много конкретни въпроси водят до решението на един и същ абстрактен въпрос.

В основата на всяка математическа наука стоят аксиомите и постулатите. Те трябва да отговарят на следните условия: първо, да бъдат независими т. е. никой от тях да не е следствие на другите и второ, логически да не си противоречат, което е равносилно на следното: ако Р е предложение, което отрича някой постулат, то да не е следствие на другите. Ако изберем за съснова на една математическа наука други постулати и аксиоми, по-раншните могат да станат следствия. Новите геометрии джелват своето появяване на отхвърлянето от Лобачевски на постулата на Архимеда за паралелните линии и приемането вместо него на нов, след една джлага редица от безплодни опити на математиците да докажат че този Архимедов постулат е теорема. В избора на аксиоми и постулати човек се води от интуицията, като апроксимира така да се каже, интуитивното съвящане. Математиката оперира с малък брой основни елементи, елементарните функции, от които може да се направят безбройно много комбинации.

Но от възможните комбинации трябва да се изберат тези, които имат нящо общо, което именно съставя математическия закон, изразен в предложения и теореми. Една изолирана комбинация, както един изолиран факт в естествените науки няма никакво значение защото не може да ни послужи за решението на някой въпрос. В стремлението си да разполагат с по-общи закони, понеже схващането на общото е трудно за човешкия ум, математиците изучават отначало по-частни закони, т. е. такива които се отнасят за по-малко на брой комбинации и след това обобщават тези частни резултати.

Да видим каква е връзката между приложната и чиста математика. За да бъде приложима математиката в някоя наука необходимо е да можем да сведем явленията, които изучава тази наука на по-прости, така че броя на отделните елементи между които ще търсим връзката да не бъде голям. Веднаж намерени тези връзки, математиката получава от тях всевъзможни комбинации и следствия, които ако началото от което сме тръгнали е верно, трябва да намерят своето потвърждение. Така математиката е силно проникнала в механиката, физиката и астрономията, в които теорията може да бъде построена на няколко постулати и прости закони. Приложните науки на математиката ни показват главно проблемите, които трябва да се разрешават, които често са свършено нови и предизвикват развитието на някои клонове от математическите науки. Така, например, голямото развитие на теорията на диференциалните уравнения с едно независимо променливо се дължи главно на проблемите, поставени от механиката. Въпросите от теорията на трептящите струни подтикнаха D'Alembert да реши някои диференциални уравнения с частни производни. Работите на Fourier в теорията на топлината поставят въпроса за определяне на неизвестни функции, които по даден контур приемат определени дадени стойности, проблема от първостепенна важност за математиката и приложните науки ѝ. Изобщо приложните науки посочват много от проблемите на математиката. Но дали тази наука трябва да чака отвън въпроси, или трябва да работи сама за себе си? Ясно е, че ако математиката разглеждаше само въпросите, които ѝ дават другите науки, тя би останала назад в своето развитие и не би могла да разрешава новопоставените проблеми и затова, както казва Jacobi, противно на

крайното мнение на Fourier, един въпрос от теорията на числата струва толкова колкото и един въпрос от света. Освен това математиците работят не само като имат пред вид ползата в приложението, но повече от естетическо удоволствие, от хармоничността на своите резултати. Една математическа наука, висшата аритметика, се отдалечава съвършено от приложните науки. Също е изобщо с Висшата Алгебра, елегантните комбинации на която удовлетворяват повечето една философска и естетическа потреба у математиците.

Каква е ползата от нови математически истини? Обикновено ако известен нов резултат обхваща като следствие много по-ранни известни, т. е. представлява тяхно обобщение, или ни дава много нови резултати, явно е че той ще бъде полезен в развитието на математиката. Особено ценен е един резултат, който внася ред там где ние сме мислили че има пълно безредие, като свързва елементи, които ни са се стрували съвършено различни. Много резултати в математиката без да обобщават една обширна класа по-рано познати резултати, без да имат също за следствие други нови, могат да имат значение за в бъдащите след развитие на други помощни теории. Обикновено това са открития с голяма оригиналност, които ние никак не сме предвиждали. За пример аз ще посоча теоремата за максимум на една детерминанта, дадена от Hadamard в 1896 г., която той смята като една куриозна теорема, но значението на която се вижда когато Fredholm я употреби за доказване сходимостта на известни редове в теорията на интегралните уравнения. Също една бележка на итал. матем. Cesaro, за сумиране на разходящи редове, която е основа на толкова много модерни математически работи. Понякога такива работи остават неоценени временно. Така например се е случило с гениалните изследвания върху алгебрическото решение на уравненията на фр. матем. E. Galois.

Казахме, че целта на математиката е да се решат проблемите. Но какво значи да се реши една проблема? Смисъла на отговора на този въпрос варира заедно с времето, като самата формулировка на проблемата се изменява. Така първоначално, от 20 века насам, математиците са търсили да намерят способ за построяване с пергел и линийка на квадрат, лицето на който е равно на лицето на даден кръг, това е прочутата проблема за квадратурата на кръга, обаче след работите на

Lindemann в 1882 г. ние вече знаем, че в тяжъв смисъл проблемата е неразрешима по причини, които ще покажем по-нататък. За средните векове една проблема е решена, когато неизвестните са определени чрез комбинирането на краен брой елементарни функции от известните величини. Докато по-рано решението на проблемите е било повече числено, т. е. търсено се е да се определи известно число, характеризиращо някоя величина, в модерната математика решението е повече качествено, т. е. търси се да се определи изобщо характера на някоя функция за всички стойности, за които тя съществува с всичките ѝ особености. Благодарение на една свойствена на ума изобретателност или от опити на комбиниране на математическите елементи достига се до въпроси, за разрешението на които често нямаме никакви сведения и подсещания. Това е особено характерно за теорията на числата, в която област разполагаме с малко общи методи, гдето, както отбелязва Poincaré, трудността е следствие от това че всяко цяло число представлява отделен индивид със своя характерна особеност. В другите области на математиката ни помага главно непрекъснатостта на разглежданите функции.

Една математическа работа предизвиква естетическа наслада когато тя се чувства като едно цяло, когато има хармония между отделните ѝ части и дава резултати които ни изненадват с своята новота и оригиналност. Един метод е толкова по-ценен, колкото той по-бързо и с по-прости средства ни довежда до решение на една по-широка класа от въпроси. Доказателствата в математиката представляват вериги от силигизми за които на всеки следващ предпоставката е заключение на предидущия. Едно такова комбиниране на силигизми няма смисъл ако не ни води до общи резултати изразени в теореми. Тук е необходимо един избор, който ръководи при откриване на нови математически истини главно интуицията. С помоща на нея човешкия ум предчувства известни вероятни резултати, в истината на които не е още логически уверен, т. е. не ги е доказал. Понякога такива предположения излизат неверни. В постройката даже на доказателството ни води интуицията като подсказва междинните вероятни предложения на джлгата верига от силигизми. С помоща на интуицията много математици са изказвали теореми без доказателство, верността на които е била по същество установена. Един тяжъв забележителен

пример ни дава Riemann с предсказаните от него свойства на функцията  $\zeta(z)$ . В последно време се стремят да намерят най-простите елементи на които се разпада едно доказателство, да класират тези елементи и ги означават с символи. Това е предмет на логистиката основана главно от итал. матем. Реало. Но в същност логистиката е повече един математически език отколкото може да помогне за развитието на математиката. Често интуицията е карала и кара математиците да грешат. Вседaysки се от нея те не дават строга дефиниция на известни понятия, като употребяват елементи и свойства на тези понятия, които те не притежават. Така до средата на миналия век са мислили че всяка непрекъсната функция има производна, или което е равносилно, кривата която представлява една непрекъсната функция има тангента в всяка нейна точка. Но след работите на Weirstrass, Darboux и др. ние знаем че съществуват непрекъснати функции които нямат производни за всички значения на независимото променливо за които са такива, или да се изразим фигуративно ако увеличим безкрайно пъти кривата която ни представя тази функция, ще я видим начупена колкото и да я увеличаваме. Причината на това е че понятието за непрекъснатост въведено в сегашната математика от Cauchy не превежда (изразява) интуитивното съществуване. Интересно е да се разреши въпроса: каква дефиниция трябва да се даде за непрекъснатост, така че всяка непрекъсната функция да има производна, без това понятие да съдържа дефиницията на производна, което е равносилно с задачата да се намерят условията за съществуване на производна. Трябва още да забележим че повечето от математическите открытия се дължат на виждане с помошта на интуицията общия резултат в частните случаи. Грешките на които са били определени математиците с абсолютната си вяра в интуицията, са ги принудили в началото на 19 век да построят анализа на по-строги и верни основи като въведат точни дефиниции и постулати. Това особено се започва след Cauchy и Abel, работите на които дават характер на целия сегашен анализ.

В създаване на нови математически работи главния път е обобщението на по-раншните резултати в по-общи. Една редица обобщения се дължат на изменение на основните елементи които се употребяват, без да се изменят разсъжденията. Така например е с много от теоремите на геометрията

с много измерения, част от теорията на функциите на много променливи и т. н. Разбира се в такъв случай могат да се явят нови свойства които усложняват разрешението на проблемите. Също в решението на много въпроси човешкия ум се ръководи от аналогията на един въпрос с друг. Понякога обаче тази аналогия е само формална и не довежда до никакъв резултат. Така известно е, че от две равнинни праволинейни фигури с равни лица може с прибавяне и изваждане на краен брой сходни фигури да се получат две сходни такива. Въпроса за определяне на обема на пирамидите предизвиква подобни разглеждания в пространството. Може ли от два полиедри с равни обеми с прибавяне и изваждане на сходни полиедри да се получат два сходни полиедра. Разбира се, предполага се че двата дадени полиедра не са сходни. На този въпрос зададен от Hilbert в 1901 г. е отговорил отрицателно Den, от което следва че не могат да се употребят същите методи както в равнината за определяне на обемите. Тук са необходими приеми, коренещи в основата си интегралното смятане.

Исканите разсъждения се отнасят естествено и до Алгебрата, като наука която е част от Математиката. Тя има тази особеност, с която се отличава от другите математически науки, че проблемите и решението им имат известна завършеност. В нея се употребяват и дедуктивния и индуктивния метод, а особено индукцията от  $n$  към  $n+1$ , която се състои в следното: за да се докаже че едно предложение, условието на което е свързано с едно число  $n$  важи за всички цели положителни стойности на  $n$ , доказва се че ако е верно за  $n=k$ , ще е верно и за  $n=k+1$ . Често се употребява метод с достигане до противоречие, който се състои в следното; ако искаме да докажем предложението  $P$  допускаме че предложението  $P'$  което отрича  $P$  е верно. Като използваме познатите предложения достигаме до едно такова  $K'$ , което отрича някое предложение  $K$ , верността на което сме доказали, от това заключаваме че  $P'$  е неверно, а  $P$  е верно.

След като направим един кратък преглед на развитието на Алгебрата от древните времена насам ние ще изложим в главни черти проблемите ѝ в ред в който те са се появявали. Алгебрата като по абстрактна наука от Геометрията се е оформила по късно от нея. Първи заченки на Алгебра срещаме в папируса на Ахмес около 1700–2000 г. пр. Р. Хр. при ча-

руването на фараона Рааус, в който папирус се среща решението на уравнения с едно неизвестно от първа степен в числени примери. Гърците не са разделяли Алгебрата от Геометрията и те по-скоро са имали една геометрическа Алгебра, в която наука действията са били извеждани върху величини и много теореми, които са резултат от алгебрически действия, са били доказани по геометрически път. Те са означавали всички понятия и действия в Алгебрата с думи. По-късно Диофант както и европейските математици до 10 век за означение на повторяеми понятия и действия въвеждали съкращения. Старите гърци разделяли аритметиката която изучава свойствата на целите числа от логистиката, която дава правилата за смятане, които са необходими в практиката. Първи питагорейците са показали съществуването на ирационални числа по геометрически път. Те са отделяли учението за числата от учението за величините, което било построено на известни аксиоми и постулати. Първи представител на Алгебрата в Гърция може да се каже че бил Диофант (около 330 г. пр. Р. Х.). Той дава решението на уравненията от първа и втора степен с едно неизвестно. Алгебрическите равенства той извежда като следствие на действията с алгебрически числа. Особено изкуство той проявява в неопределения анализ, но няма още понятие за отрицателни числа. На Евклид се джлжи едно остроумно доказателство че броя на простите числа е неограничен. След упадъка на гръцката наука, Алгебрата и Аритметиката се развиват силно в индусите. Те дават способ за решаване на неопределени уравнения от първа степен, който не се отличава от открития в 18 в. метод на Euler, решавали са уравненията от втора степен с едно неизвестно и някой други неопределени уравнения. Това което е спомогнато много за развитието на тези науки у тях е абстрагирането на понятието число от величина, въвеждането на отрицателните и ирационални числа, над които извеждвали всички действия каквито и над обикновените натурални числа.

Арабите създали математическите си познания от гърците и индусите. Оригинално те малко са създали. В тях се среща вече геометрическото решаване на уравненията от трета степен.

Европейските народи от средните векове бавно са възприели знанията на Изтоха. Първите си познания по Матема-

тиката засели от римляните, които не само не създавали нящо оригинално, но даже не създавали науката на гърците и арабите. Съчиненията в този период създавани били преводни. Особено забележително е било това на Леонардо Фиbonacci — *Liber Abaci* в което създавани били дадени всички познания на арабите по алгебра и аритметика.

Алгебрата се развива силно в началото на 16-то столетие, когато се открива от италианските математици Scipio Ferro (умрял в 1526 г.) и Tartaglia (1500—1557 г.) алгебрическото решение на уравненията от трета степен, а от Ludovico Ferrari, около същото време, решението на уравнението от четвърта степен, като приема окончателно сегашния си символизъм след работите на бележития французски математик François Viète (1540—1603 г.). В издаденото от него съчинение той е въвел буквите за означаване на величините и действията се извеждат върху тях. През 16 столетие и в началото на 17 столетие математиците не са имали ясна представа за отрицателните числа и употреблението им се избягвало. Пълното им обяснение е било дадено от Descartes (1596—1650 г.) когато той им е дал и геометрическото представяне като схващане на направление, до каквото разбиране създавани много по рано индуистите. В това време стремежа да се решат алгебрическите уравнения е подтикнала изучаването на корените им. На Viete е била почти известна връзката между коефициентите и корените на уравненията, но той вземал само положителните корени. Била му е известна теоремата за разлагане на полиномите на биномни множители и някои елементарни трансформации. Тези въпроси са били разработени след това от Albert Girard (1590—1633) и Thomas Harriot (1560—1621). След въвеждането на означенията на показатели от Simon Stevin (1548 — 1630) и знаци за равенство и други, в Декарта се среща напълно развита система на означения, която след някои усъвършенствования приема сегашния си вид. Успешното решаване на уравненията от трета и четвърта степен е предизвикало математиците да се стремят да решат алгебрически уравненията от по-високи степени, която проблема се създава в намиране на един алгебрически израз на коефициентите, съставен от тях чрез краен брой действия събиране, умножение, степенуване и обратните им на тях, който замествен в уравнението го об-

ржща в тождество. Но тук, като важен фактор изпъква степента на уравнението. Те не са успели да решат в този смисъл общи уравнения от степен по-голяма от четири по причини които по-сетне ще покажем, а само някои съвсем специални видове. Невъзможността да се намери такъв общ израз който да служи за пресмятане на корените, е принудило математиците, да търсят с приближение корена, като третират направо численото уравнение. Така се появява теорията на числено решение на уравненията. Но за да се постигне, да се реши тази задача необходимо е да се отделят корените, т. е. да се намерят интервали които съдържат само по един корен, и от там е и въпроса за определяне броя на корените в известен интервал, развитието на който представя една от най хубавите работи на Алгебрата. Значителен прогрес за решението на този въпрос е било откритието на теоремата на Descartes, според която броя на положителните корени на едно уравнение с реални коефициенти не надминава броя на вариациите на последните, строго доказателство на която по късно е било дадено от De Gua. Един път корените отделени необходимо е да се има метода за приблизителното им пресмятане. Такава метода е била дадена от J. Newton (1642—1727), която е приложима и за някои транцендентни уравнения. На Newton се дължат също други големи открития в Алгебрата, като формулата за степените сборове, също така развитието на бинома за цели положителни и отрицателни показатели. За дробни показатели това развитие е било приложено от Euler, но доказателството му страда по отношение на строгост, понеже не доказва сходимостта на известни редове. В началото на 19 в. норвежкия математик Henrik Abel в един мемоар, който е образец на строгост в доказателството в новия анализ, я доказва за всички реални и имагинерни степени. Newton изказва една теорема за долната граница на броя на имагинерните корени без доказателство която добил вероятно по емпиричен път. Тази теорема е била обобщена и доказана чак в 1865 год. от английския алгебрист Sylvester. Методата му за приблизителното пресмятане на корените на алгебрическите уравнения е била по-сетне усъвършенствувана от французкия математик Fourier. С името на Newton е свързана една друга проблема на алгебрата интерполяцията, целта на която е да се даде удобна за нумерични

пресмятания формула на една функция, която приема дадени стойности за една редица от значения на независимите променливи. Интерполяцията се среща и у Briggs (1624), Wallis, Leibnitz, а след Newton е била главно разработена от Вегенули, Stirling, Lagrange, Laplace и Чебишев, на когото се дължат много резултати в теорията на смятане с разлики, която област от Алгебрата има за цел да се намерят връзки между стойностите, които приема една функция когато на независимите променливи даваме значение в аритметическа прогресия. На Rolle (1652—1719) се дължи една теорема за връзката между корените на едно алгебрическо уравнение и неговите производни, която в някой случай помага за отделянето на корените му. При решаване на линейни уравнения с няколко неизвестни Leibnitz в 1678 и по късно Cramer в 1750 забелязват че неизвестните се изразяват от коефициентите по-средством функции, които лесно се съставят по един общ закон. Тези функции наречени детерминанти са били разработени от Laplace, който е дал важното правило за развитието им по поддетерминанти, и в средата на 19 в. от Jacobi, който дава на теорията им един завършен вид.

Един важен въпрос а именно съществуването на корени на алгебрическите уравнения е нямал строга основа. Този въпрос се появил особено в средните векове когато Cardan (1545) първи е забелязал, че едно уравнение от трета степен може да има три корена, а от четвърта да има четри. Някои математици са изказвали теоремата че всяко уравнение има толкова корени колкото е степента му, но първи е дал по-верно доказателство на това французкия математик D'Alembert в 1746 г. и от тук теоремата за съществуване корен се назова принцип на D'Alembert. От тогава са дадени много доказателства малко или по-вече строги, според това доколко се опират на интуитивните ни съващания. Тук ще отбележим че съществуването на корен на едно алгебрическо уравнение направо следва от една теорема на Hadamard върху целите функции. Действително ако се допусне че уравнението  $p(u)=0$  няма корен, то функцията  $P(\sin z)$  няма да има нули, което значи, като използваме теоремата на Hadamard, че трябва да има вида  $ke^{cz}$  в невъзможността на което лесно се уverяваме.

В анализа се срещат по естествен път някои числа като например основата  $e$  на неперовите логаритми, числото  $\pi$  и т. н. Естествено е да се зададе въпроса за ирационалността им. Пръв Euler (1737) доказва че  $e$  и  $e^2$  са ирационални, а по-сетне Lambert (1761) доказва същото за  $\pi$ , а Legendre за  $\pi$  и  $\pi^2$  (1823) като са използвали теорията на верижните дроби, която в това време се е развивала. Ние познаваме малко ирационални числа, които имат важно значение в анализа. Изобщо проблемата за определяне и рационалността на едно зададено число е от трудните задачи на Алгебрата.

Теорията на алгебрическата разрешимост на уравненията значително напредва с работите на великия французки математик Lagrange (Joseph Louis 1736 — 1813). В своите мемоари в Берлинската Академия на науките от 1770 и 1771 г. той дава обща теория на трансформацията на уравненията, т. е. в намиране на друго уравнение, корените на което се получават от една рационална функция на корените на даденото уравнение като ги разместваме по всевъзможни начини, като свежда в една метода всички такива известни за решаване на уравненията от първите четири степени. Особено значение придобива една функция съставена линейно чрез корените на едно уравнение и на единицата, като основа на по-нататъшните работи на Causs и Abel. Lagrange също доказва че корените на квадратни уравнения с рационални коефициенти се развиват в периодически верижни дроби. Английския математик Waring (1734 — 1798) разработва теорията на симетрическите функции и исказва една теорема, която е обобщение на една по-раншна на Fermat, че всяко цяло число е сбор на  $n$ -ти степени на цели числа броя на които зависи само от  $n$ . Тази теорема е доказана наскоро от големия германски математик David Hilbert.

Въпроса за решението на алгебрическите уравнения с няколко неизвестни докарва до създаването на теорията на елиминацията от французкия инженер Etienne Besout в 18 в.

В 19 век, благодарение на вдълбочаване на математиците в основните принципи и въвеждането на комплексните числа, Алгебрата се обогатява с нови теореми. Най-силно е било влиянието на Gauss. На него се дължи решението на биномните уравнения, на което той намира едно хубаво приложение в геометрията като доказва че всеки правилен многожълник,

броя на страните на който е едно просто число  $p$  имащо форма  $4n + 1$ , може да се построи с пергел и линийка. Основава и развива теорията на конгруенциите, дава няколко доказателства на теоремата на D'Alembert и на закона за квадратните остатъци, изказан без строго доказателство от Legendre, както и теорията на най-малките квадрати необходима за поправяне на грешките в приложните науки.

Едно важно понятие във математиката на 19 в., което първоначално се въвежда следствие опитите за алгебрическо решаване на уравненията, е понятието за група. В Алгебрата наричаме субституция заместването на дадени елементи в известен ред със същите но в друг ред. Един ансамбл от субституции наричаме група, когато на две последователно извеждани произволни субституции от ансамбла отговаря друга субституция ст него, която приложена дава същия резултат. Началото на тази теория е в работите на Lagrange, а развитието ѝ първоначално се дължи на Cauchy. Теорията на алгебрическото решение на уравненията напредва значително с работите на двамата математици Abel и Galois. Основавайки се на една теорема на Cauchy върху субституциите Abel (р. 1802 — у. 1829 г.) доказва че общите уравнения от степен по-висока от четири са неразрешиими алгебрически, като се туря край на всички безуспешни такива опити, и, вдълбочавайки се в метода на Gauss за решение на биномните уравнения, дава решението на една класа уравнения, които се характеризират с рационални връзки между два корена. Но на Evariste Galois (1811 — 1831 г.) принадлежи славата да открие фондаменталните елементи ст които зависи алгебрическото решение, като показва че на всяко уравнение отговаря една група субституции, в която са отразени така да се каже свойствата на уравнението. От това се явява нужда да се въведе понятието на подгрупи инварианти, делението на групите на сложни и прости, на примитивни и непримитивни. За уравнение от проста степен условието за разрешимост на Galois се свежда към условието че всички корени да са рационални функции на два от тях. Работите на Galois са били продължени от много математици. Италиянският математик Betti (1823 — 1892 г.) доказва някой теореми оставени от Galois без доказателство, например теоремата че модулярните уравнения от степен 5, 7, 11, от които зависи трансформа-

цията на елиптическите функции са неразрешими алгебриически, а заедно с Hermite и Kronecker дава решението на уравненията от пета степен с елиптически функции. Теорията на алгебрическото решение на уравненията е разработена по-сетне главно от големия французки математик Camille Jordan и германския Leopold Kronecker, а теорията на групите се развива с работите на Jordan, Netto, Miller, Frobenius, Maillet и т. н., като понятието за група се разшири. Казва се че един ансамбл от елементи образува група, когато е дадено едно правило с което от кои да е два елемента на ансамбла се получава трети, принадлежащ на него. Това понятие за група доминира в разните клонове на математиката. Разгледани са така прекъснати групи и функциите, които не се изменят от тях. Такива са фуксовите функции на Poincaré, които не се изменят за дребни линейни трансформации, образуващи прекъснати групи. Основавайки се на работите на Galois, или по-скоро на аналогията с тях, Sophus Lie разви една голяма теория на непрекъснатите трансформационни групи и тяхното приложение в интегриране на диференциалните уравнения.

За окончателното решение на въпроса за определяне броя на корените в известни граници е спомогнала много откритата теорема от Budan и Fourier, която дава с доста прости средства само горна граница на този брой. Изучвайки работите на тези двама математици, подсещайки се главно за условията на които трябва да удовлетворяват известни функции, Sturm в 1829 г. направи едно от най-хубавите открития в Алгебрата, като даде знаменитата си теорема за определяне точно на търсения брой корени. С това може да се счита вече че тази проблема се завършва и става класическа в Алгебрата. Но по-късно оригиналния французки математик Edmond Laguerre (1834—1886 година) ни показва че още може много съществено да се направи в тази посока, като разшири по един остроумен начин теоремата на Descartes за функции, дефинирани чрез степенен ред, като даде нов метод за определяне горния брой. На Laguerre се джлякат някои изучавания върху имагинерните корени, въпроси които придобиват значение в модерната Алгебра.

Първите употребявани числа са били положителните цели числа. Но необходимостта от разширение на някои операции е предизвикала въвеждането на нови числа. Така из-

важдането е предизвикало появяване на отрицателни числа, а коренуването на имагинерните. На последните отначало са гледали като въображаеми, както показва и името им, а в средата на 18 в. ги употребявали за по-лесно намиране на релации между реалните величини, като извеждали над имагинерните числа всички действия каквито и над реалните, без да имат ясно понятие за тях. Строгото обоснование на теорията им се дължи главно на Gauss, Argand, Gompertz, Hamilton, Grassman, Morgan и Cauchy. С геометрическото представяне, което възвели Argand и Gauss, се е целяло не само едно представяне на тях, т. е. намиране съответно на всяко комплексно число една точка от равнината, но и обоснование на действията, като се докаже легитимността на смятането с тях. Аритметическият възглед е бил развит от Hamilton, който гледа на едно комплексно число като чифт ( $a, b$ ), който се подчинява на всички действия с известни условия. Ясно е, че тогава се явява въпроса: не съществуват ли комплексни числа с повече от две единици, такива, че всички закони на аритметиката да се прилагат към тях. Тяхното значение би било за анализа грамадно. Но Weierstrass и Dedekind доказват че едни такива числа са невъзможни и трябва да се прости с някои закони, важни за обикновените реални и комплексни числа. Една такав система от некомутативни числа, наречени кватерниони, е била открита от Hamilton в 1843 г., които благодарение на геометрическото си представяне имат голямо приложение в Механиката и Геометрията. На германския математик Grassman се дължи една теория на твърде общи числа, до които той идва по геометрически път и които са удобни за приложенията в Геометрията. Развитието на въпросите за разните видове числа се дължи още и на математиците Clifford, Peirce, Lipschitz, Dedekind, Kronecker, Study, Cartan и Frobenius. Изобщо в съвременната математика наричат система от числа всеки ансамбл на елементи, каквито и да са по природа, върху които се дефинира равенство на някои операции за смятане. В тези операции влизат обикновено събирането и умножението, което е дистрибутивно спрямо първото. Комплексно число от ред  $n$  се представя като линейна функция от  $n$  единици с коефициенти реални числа, наречени кординати. Умножението се дефинира, като се дава умножението на единиците, понеже

дистрибутивния закон е в сила. Graves и Cayley съж разглеждали комплексни числа, наречени октанти, с осем единици, за които освен комутативния но и асоциативния закон не е в сила и които имат интересно приложение. По аналогия с реалните цели числа, полезно е, разбира се, да се изучат свойствата на целите комплексни числа, т. е. такива, на които координатите са цели числа. Пржв Gauss е доказал, че обикновените цели комплексни числа имат същите аритметически свойства, каквито имат целите реални числа. Същото доказа Hurwitz и за целите кватерниони, в които обаче една от единиците е заместена с полусбора на единиците на Hamilton.

Една друга част от Алгебрата с голямо значение е теорията на целите алгебрически рационални и хомогенни функции на няколко променливи, наречени форми. Относително тях се поставят две проблеми: Първата е Аритметическа — да се определят числата които могат да се представят с една форма с цели коефициенти, което е равносилно с определяне стойностите, които може да приема формата, когато на променливите се дават за значение всички цели числа. Постигнатите резултати в това направление са многобройни, затова ние няма да ги излагаме, а само ще посочим главните изучени форми и математиците, които са ги изучвали. Теорията на квадратичните бинерни форми е била развита главно от Lagrange, Brioschi, Dirichlet и Clebsch и т. н. Геометрическото им представяне е вжедено от Minkowski, Klein и Poincaré много олеснява тяхната теория и служи за интуитивно подсещане в откриване на нови резултати. Тук спадат и формите на Hermite с имагинерни коефициенти и променливи. Eisenstein и Gauss дават много нови работи върху квадратичните тернерни форми. Редукцията им за да се узнае дали са еквивалентни се дължи на Gauss, Dirichlet и Hermite. Представлява интерес и въпроса за представяване на квадратични бинерни форми с квадратични тернерни. Една забележителна теорема, може би известна още на Диофант, и изказана посетне от Bachet de Mésiriac (1621) е че всяко число е сбор от четири квадрата, е била доказана за пржв път от Lagrange (1770) Euler (1777) (На Eisenstein се дължат важни резултати за една специална кубическа бинерна форма). Изобщо аритметическата теория на формите е била много разработена от математиците Jacobi, Liouville, Clebsch, Weill, Charve (1882).

Някой геометрически въпроси са предизвикали създаването на теорията на инвариантите на формите, които са цели рационални функции на коефициентите им, които при линейни трансформации, новата стойност която получават е равна на първоначалната умножена с някоя степен на детерминантата на субституциите. Също и теорията на ковариантите, които са функции и на самите променливи имат подобно свойство. Главна заслуга в тези теории имат английските математици Cayley (Arthur 1821—1895) и Sylvester., на когото се дължат работи за даване кононическа форма чрез трансформация на формите. Германският математик Agenhold (1819—1882) дава една елегантна символична метода за изучаване инвариантите, а R. Gordan доказва че има краен брой адюнгириани форми. Квадратичните форми имат това свойство че могат да се представят с сбор от квадрати на линейни функции с коефициенти, броя на положителните и на отрицателните от които е един и същ за различните представления, свойство наречено закон за инерцията и открито от Sylvester, което намира едно хубаво приложение в една теорема на Hermite за определяне броя на реалните корени на едно алгебрическо уравнение, намиращи се в определени граници. В теорията на линеини форми с коефициенти, които не са цели числа, интересен е въпроса да се направи стойността им по-малка от дадено число. След първите работи на Dirichlet и Hirwitz германският математик Minkowski чрез създадената от него геометрия на числата дава забележително развитие на тази теория.

Проблемата на квадратурата на кръга е занимавала математиците от древни времена. Неуспехите да я разрешат са ги принудили да се вдълбочат във възможността на такова едно решение, като доказали че ако едно решение с пергел и линийка е възможно числото  $\pi$  трябва да е корен на едно алгебрическо уравнение с рационални коефициенти, т. е. да бъде алгебрическо число. Ако  $\pi$  не е алгебрическо или с други думи трансцендентно, проблемата е невъзможна. За да има смисъл въпроса за разискване на характера на  $\pi$ , трябва естествено да се докаже съществуването на трансцендентни числа, което имено биде направено от френският математик Liouville в 1851 г. По същите Cantor с развитата от него теория на ансамблите даде ново по естествено доказателство, като доказа че ансамбла на алгебрическите числа е ну-

мерован, а този на всички реални числа има мощност на непрекъснатост. Доказателството на Liouville има това преимущество че дава способ за образуване на такива числа. В 1873 г. Hermite в резултат на работите си върху апроксимирането на някои функции, особено експоненциалната с непрекъснати алгебрически дроби, доказа транцедентността на  $e$ . Водейки се от методите му германският математик Lindemann в 1882 г. доказа транцедентността на  $\pi$ , с което се туря край на проблемата за квадратура на кръга, която по само себе си няма значение, но е подтиквала развитието на математиката от 20 века насам. На Hilbert се джлжи много просто доказателство. Hermite, а по-сетне Laguerre третират въпроса за представяне на функциите с верижни дроби и сходимостта на последните. Верижните дроби на които частните са функции на едно променливо, могат да представлят една функция в цялата равнина с изключение на известни линии. Общи методи за представяне на функциите с верижни дроби не се познават. Една доста обширна класа от такива алгебрически дроби са били разглеждани от холандския математик Stiltjes (1856—1893), за които той дава една красива теория. В тази част на Алгебрата има много още да се работи. В Изследванията на Abel за алгебрическа разрешимост се среща важното понятие за област на рационалност, която е ансамбла на всички рационални функции с рационални кофициенти на дадени параметри  $R_1, \dots, R_n$  които се считат като известни величини. На Galois се джлжи също така важното понятие за адюнгиране на някой величини към областа, т. е. считане в числото на по-раншните параметри нови величини произволни по природа. Ако параметрите  $R$  са корени на алгебрически уравнения с рационални кофициенти получаваме алгебрическо тяло. В едно такова тяло важен е ансамбла от елементите, които се възстановяват със събиране, изваждане и умножение. Със значение за Алгебрата са алгебрически тела, в които елементите са цели рационални функции с цели кофициенти от алгебрически числа. В едно такова тяло съставено от имагинерната единица Gauss доказва, че са в сила всички свойства на реалните цели числа, а Eisenstein доказва същото за едно кубично тяло. Но в много такива тела тези свойства не се запазват. Така в една такава област, най проста от които е областта от числа от вида  $a + b\sqrt{-5}$ , две числа могат

да нямат общ най-голям делител и второ едно произведение може да се дели на едно просто число, без някой от множителите да се дели на него и от тук липсва единствеността в разлагането на едно число на прости множители. Кимтег, за тела съставени от корените на единицата, въвежда едно фиктивно число, наречено идеал, което за две дадени числа да играе ролята на най-голям общ делител. С тази си теория той доказа, за много случаи изказаната без доказателство теорема от Fermat според която сбера от  $n$ -те степени на две цели числа не може да биде  $n$ -та степен на цяло число при  $n$  по-голямо от две. Дефиницията на Кимтег за идеал страда от това че не може да се разпростира за всички тела. Обща дефиниция на идеал дава по-сетне Dedekind, който разви една стройна теория на алгебрическите числа, която с работите на Weber, Hensel и други продължава да се усъвършенства.

За да разреши някой въпроси пржв Fourier достига до разглеждане на безбройно число линеарни уравнения с безкрайно число неизвестни. На една такава специална система дава решение, по-късно Appell, с помоща на която дава развитие в тригонометричен ред на частното на две елиптически функции. Строга теория на тях е дадена след това от Poincaré, който установява един критерий за сходимостта на детерминантите от безкраен ред, обобщен по-късно от Helge Von Koch. David Hilbert развива теорията на квадратичните форми с безбройно число променливи, с помоща на която изведе свойствата на решениета на интегралните уравнения на Fredholm.

Да разгледаме сега в главни черти проблемите които има да се решават в Алгебрата. Главната проблема на тази наука, а именно решението на уравненията е постигната доста задоволително само за численото решение. Но работите на Laguerre ни показват че и тук може да се постигне упростяване, като се дадат методи за някои специални класи от уравнения, така например такива само с реални корени или удовлетворяващи на някои други условия. Един интересен въпрос, за решението на който се има някои резултати, е да се дадат прости средства за изследване на разположението на корените на едно уравнение в равнината на комплексните числа. Първите работи в това направление

се джлжат на Laguerre. С помошта на теорията на групите, действително чрез краен брой операции, може да се узнае дали едно алгебрическо уравнение е решимо или не, като се намери групата му и се изследва, но този брой на операциите за уравнения от по-висока степен е така голям изобщо, че практически те са неизпълними. Трябва да се дадат прости критерии с помошта на които от коефициентите да се съди за алгебрическата решимост на уравненията. В теорията на групите, за които ние имаме още сравнително малко резултати, има още да се направят много изследвания, главната цел на които естествено, е да се намерят всички групи от дадени  $n$  елемента. Теорията на инвариантите на формите е действително достатъчно развита, но остава да се търсат инварианти за известни групи от трансформации. Разрешението на тези въпроси ще даде подтик за развитието на останалите клонове от математиката, обаче, както вече споменахме, благодарение на изобретателността на човешкия ум и нуждата от приложенията, ще се явят нови проблеми, които ще доведат до нови усложнения за които сега можем само да предполагаме.

---