Година X-XI 1913/14, 1914/15 год. Книга I.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математически факултет

Функции.

(Встѫпна лекция, четена на 7 октомврий 1914 г.)

Отъ доцента Д-ръ К. Поповъ.

При своето развитие различнитѣ отрасли на науката си взаимно влияятъ; всѣки прогресъ реализиранъ въ една отъ тѣхъ се отразява и върху останалитѣ. Това се дължи на тѣсната връзка между явленията, обектъ на тѣзи науки.

Математиката разглежда явленията въ тѣхната най-голѣма общность, като свежда всичко къмъ числени (и пространствени) съотношения. Всѣки новъ откритъ законъ, всѣки прогресъ реализиранъ въ другитѣ науки е начало за нови математични издирвания, които отъ своя страна уясняватъ установенитѣ съотношения, показватъ на възможнитѣ слѣдствия отъ тѣхъ и по този начинъ даватъ потикъ за нови открития.

Казахъ, че математиката изучава съотношението между величинитѣ, които характеризиратъ елементитѣ на явленията. Но единъ отъ важнитѣ моменти въ нейното развитие е моментътъ, когато тя си задава за задача да изучи характернитѣ особености на съотношенията установени въ различнитѣ науки и да изтъкне тѣхнитѣ общи свойства.

Азъ употрѣбихъ думата съотношение. Въ математиката е приетъ терминътъ „функционална зависимость“. Този терминъ ще употрѣбявамъ занапрѣдъ и азъ.

Най-простата функционална зависимость е зависимостьта между двѣ величини. Такава зависимость имаме напримѣръ между изразходваната енергия и произведената работа, между концентрацията на разтворитѣ и скоростьта на химическитѣ процеси, между пѫтя изминатъ съ дадена скорость и врѣмето, за което този пѫть е изминатъ.

На всѣко изразходвано количество вѫглища въ парната машина при дадени условия отговаря една напълно опрѣдѣлена извършена работа; на всѣка опрѣдѣлена концентрация на разтворитѣ отговаря една напълно опрѣдѣлена скорость на химическата реакция между разтворенитѣ вещества. Знаемъ ли концентрацията, знаемъ скоростьта, съ която става химическиятъ процесъ. Най-послѣ, на всѣки моментъ при послѣдния примѣръ отговаря единъ напълно опрѣдѣленъ изминатъ пѫть.

Ний казваме че една величина y е функция на друга x, ако за всѣка стойность на x отговаря една напълно опрѣдѣлена стойность на y. Това обикновено бѣлѣжимъ тъй:

$$y = f(x).$$

Тукъ x се разглежда като независима промѣнлива. Споредъ тази дефиниция, извършената работа ще бѫде функция на изразходваното гориво, скоростьта на реакцията между разтворитѣ — функция на тѣхната концентрация, а изминатиятъ пѫть — функция на изтеклото врѣме. Независимитѣ промѣнливи тукъ сѫ изразходваното гориво, концентрацията на разтвора и изтеклото врѣме.

Тукъ не е необходимо да бѫдатъ дадени аритметичнитѣ операции, които трѣбва да се извършатъ надъ независимата промѣнлива, за да се получатъ стойноститѣ на функцията. Нейнитѣ стойности за всѣка стойность на независимата промѣнлива могатъ да бѫдатъ дадени и съ една крива, съ една графика, каквито публикува нашата дирекция на статистиката, съ една обикновена таблица, каквито публикува нашата дирекция на желѣзницитѣ за движението на треноветѣ, или по какъвто и да било другъ начинъ.

Първо нѣщо, което се хвърля въ очи, като изучваме различнитѣ функции установени въ природоматематичнитѣ науки, е непрѣкѫснатостьта на тѣзи функции, т. е. на малки промѣни на независимото промѣнливо отговарятъ малки промѣни въ стойностьта на функцията, промѣни, които клонятъ едноврѣменно къмъ нула съ промѣнитѣ на независимата промѣнлива. Освѣнъ това, тѣзи промѣни, когато сѫ малки, сѫ почти пропорционални една на друга. Тъй напримѣръ, при всѣко движение въ природата, изминатиятъ пѫть е почти пропорционаленъ на изтеклото врѣме, когато нашитѣ наблюдения се ограничаватъ въ малки интервали врѣме около даденъ моментъ, като че въ тѣзи интервали движението става съ една и сѫща скорость. Нѣщо аналогично на скоростьта имаме при всѣка функционална зависимость установена въ природоматематичнитѣ науки.

Реакцията, която става въ епруветката на химика, въ всѣки моментъ става съ една опрѣдѣлена скорость, характерна за момента, която сама се мѣни отъ моментъ на моментъ съ измѣнението концетрацията на разтвора, вслѣдствие на настѫпилата химическа реакция между разтворенитѣ вещества, и можеме да разглеждаме слѣдователно и *скоростьта*, съ която се мѣни *самата скорость на реакцията*.

Когато отслабимъ горението — въ парната машина отслабва съотвѣтно и извършената работа. Това отслабване зависи тъй да кажа отъ отслабването силата на огъня. И тукъ въ съотношението между силата на огъня и съотвѣтнитѣ промѣни въ интензивностьта, съ която машината работи, не е мжчно да се долови нѣщо аналогично на съотношението между изминатия пжть и врѣмето, нѣщо аналогично на скоростьта.

Една отъ най-характернитѣ черти на функциитѣ, които се срѣщатъ при изучване на природнитѣ явления, е тази: тѣ сж непрѣкжснати и се мѣнятъ съ скорость, която сама може да бжде промѣнлива, т. е., както се говори въ математиката — иматъ производна.

* * *

Явленията въ природата обикновено не сж тъй прости както ги прѣдставихъ. Изминатиятъ пжтъ напримѣръ зависи не само отъ врѣмето, но и отъ скоростьта на движението. Скоростьта на реакцията между два разтвора не зависи само отъ концентрацията на разтвора; температурата и химическото родство тукъ сж не по малко важни фактори. Интензивностьта съ която работи една парна машина, освѣнъ отъ количеството на вжглищата, които консомира, зависи и отъ степеньта, до която се охлаждатъ паритѣ въ нейния хладилникъ.

Изучването на тѣзи и подобни явления ни води къмъ съотношение между по-вече отъ двѣ величини, къмъ функции съ по-вече независими промѣнливи.

Ний казваме че една величина u е функция на величинитѣ x, y, z, ако за всѣка система стойностьта на x, y, z, взети въ дадена область, отговаря една напълно опрѣдѣлена стойность на u. За да изтъкнемъ това, ний пишемъ: $u = f(x, y, z)$. Тукъ величинитѣ x, y, z разглеждаме като независими.

Изучването на природнитѣ явления ни води обикновено до непрѣкжснати функции отъ този родъ. Слаби промѣни въ x, y, z прѣдизвикватъ слаби промени въ u. И тукъ има пропорционалность между малкитѣ промѣни на x и съотвѣтнитѣ промѣни въ u, и тукъ се явяватъ коефициенти аналогични на скоростьта при явленията на механиката.

Когато промѣнливитѣ x, y, z вøkdзематъ послѣдователно двѣтѣ близки системи стойности (a, b, c) и $(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma)$ нашата функция u взема сжщо двѣ различни стойности, които за краткость ще означимъ съ $f(a, b, c)$ и $f(a+\alpha, b+\beta, c+\gamma)$. При дадени условия, които почти винаги сж удовлетворени отъ функциитѣ, които срѣщаме при изучване на природнитѣ явления, между тѣзи величини има слѣднята много проста връзка:

$$(1)\ f\ (a+\alpha,\ b+\beta,\ c+\gamma) - f\ (a,\ b,\ c) = A\ \alpha + B\ \beta + C\gamma,$$

когато α, β, γ сж много малки.

Да вземемъ единъ примѣръ. Физиката ни учи, че между обема (v) на единъ килограмъ въздухъ, измѣренъ въ кубически метри, неговата температура t^o (Целзий) и налѣгането (p) на газа върху повърхнина отъ единъ квадратенъ метъръ, туй налѣгане, измѣрено въ килограма, има слѣднята връзка:

$$p = \frac{29{\cdot}27\ (t^0 + 273^0)}{v}$$

Оттукъ се получава, че, на промѣна Δt въ температурата и промѣна Δv въ обема на газа, отговаря една промѣна Δp въ налѣгането, равна на

$$\Delta p = \frac{29{\cdot}27}{v}\Delta t - \frac{29{\cdot}27\ (273+t)}{v^2}\Delta v$$

При обемъ $v = 1$ кубически метъръ и температура $t = o$, за промѣнитѣ на налѣгането имаме:

$$\Delta p = 29\ \Delta t - 79{\cdot}89\ \Delta v$$

При обемъ $v = 100$ м^3 и $t^0 = o$, имаме:

$$\Delta p = 0{\cdot}29\ \Delta t - 0{\cdot}79\ \Delta v$$

При обемъ $v = 1000$ м^3.и $t = -100^0$ имаме:

$$\Delta p = 0{\cdot}030\ \Delta t - 0{\cdot}005\ \Delta v$$

Тукъ коефициентитѣ прѣдъ Δt и Δv отговарятъ на коефицентитѣ A и B въ равенство (1) и показватъ съ каква скорость се мѣни налѣгането p, при сьотвѣтнитѣ промѣни на температурата и обема на газа въ съотвѣтнитѣ случаи.

Тѣзи коефеценти, както се вижда отъ този примѣръ, сж сами промѣнливи; тѣ зависятъ отъ вида на самата функция и отъ специалнитѣ стойности на независимитѣ промѣнливи.

Но обикновено законитѣ, по които се мѣнятъ коефициентитѣ A, B, C, сж много по-прости отъ законитѣ, по които се мѣни самата функция и често дори до тѣхъ може да се дойде по интуитивенъ пжть.

Веднъжъ тѣзи закони открити, Математическиятъ Анализъ ни дава срѣдство, отъ законитѣ, по които се мѣнятъ коефициентитѣ A, B, C, да се издигнемъ до общия законъ на явлението. *Тази е една отъ най-важнитѣ задачи на Математическия Анализъ.*

Често тѣзи коефициенти A, B, C се мѣнятъ въ много широки прѣдѣли и единъ отъ тѣхъ, както е случая съ коефициента прѣдъ Δv, при дадени обстоятелства, при дадени стойности на независимитѣ промѣнливи, може да добива много голѣми стойности, а при други условия, при други стойности на независимитѣ промѣнливи — да взема много малки стойности, даже стойностьта нула, както въ въ горния примѣръ при абсолютната нула, т. е. при температура — 273°.

Ако изучаваме явлението при условия, при които този коефициентъ добива много голѣми стойности (при условия $v = 1$, $t = o$ въ нашия примѣръ), тогава съотвѣтната промѣнлива v ще оказва прѣобладаваще влияние върху хода на явлението и може да затъмни за насъ влиянието на останалитѣ промѣнливи. Въ нашия примѣръ промѣнитѣ въ налѣгането ще зависятъ главно, ако не едничко, отъ промѣнитѣ въ обема. Но при условия $v = 1000$, $t = -100$ този коефициентъ добива малки стойности и промѣни съ нѣколко десетинки само отъ градуси ще сж въ състояние да маскиратъ влиянието на обема върху налѣгането.

Като изучаваме явленията при дадени условия, ний установяваме само законитѣ на една фаза на явлението. За да можемъ да се издигнемъ до общия законъ трѣбва да изучимъ явлението въ неговитѣ различни фази, да установимъ по-проститѣ закони, по които се мѣнятъ коефициентитѣ A, B, C. Математическиятъ Анализъ ще ни даде останалото.

Обръщамъ вниманието ви върху едно много важно обстоятелство. Тукъ, до като имаме още работа съ функции само на нѣколко независими промѣнливи, коефициентитѣ A, B, C, които сж частнитѣ скорости, съ които се мѣни функцията u спрѣмо съотвѣтнитѣ промѣнливи x, y, z, зависятъ само отъ вида на функцията, но не и отъ характера и голѣмината на промѣнитѣ на независимитѣ промѣнливи. Въ случаитѣ, които ще разгледамъ сега, това вече не е тъй.

При много отъ явленията, прѣдметъ на математично изслѣдване, можемъ да се ограничимъ само съ нѣколко фактори, да разглеждаме функции на нѣколко само промѣнливи. Например, когато изучваме движението на тѣлата отъ нашата слънчева система, ний можемъ да приемемъ, че тѣхнитѣ маси сж концентрирани въ тѣхнитѣ геометрични центрове, и да разглеждаме само дѣйствието на тѣзи маси една върху друга, като прѣнебрѣгнемъ влиянието на всичкитѣ останали небесни тѣла върху тѣхъ, като такова, което не измѣня характера на движението на нашата система.

Но за да можемъ да сведемъ изучването на движението въ нашата слънчева система къмъ изучване взаимодѣйствието на нѣколко само материални точки, ний трѣбва да подемемъ това изучване слѣдъ момента, когато, подъ дѣйствието на елементарнитѣ сили между безчетъ частици, които първоначално сѫ съставлявали тази система, сѫ се формирали отдѣлнитѣ планети. Тукъ, благодарение на това, че безброй много частици сѫ се групирали около само нѣколко центрове, и благодарение на особеното разпрѣдѣление на частицитѣ около тѣзи центрове, ний можемъ да замѣстимъ тѣхното дѣйствие съ дѣйствието само на нѣколко маси, концентрирани въ нѣколко точки.

Ако изобщо явленията и да сѫ продуктъ на безчетъ много фактори, често дѣйствията на една група отъ тѣхъ може да се изрази съ една проста функция, която зависи отъ безброй много стойности на друга една функция, функция, която изразява закона на елементарнитѣ дѣйствия.

Математикътъ, за да може да слѣди съ своитѣ формули природата въ нейната безкрайна еволюция, трѣбва да оперира съ понятия, които да сѫ годни за тази еволюция.

Едно отъ основнитѣ понятия въ математиката, както видѣхме, е понятието функция. Притегателната сила между двѣ материални частици е обратно пропорционална на квадрата на взаимнитѣ имъ разстояния $f=\frac{m}{r^2}$; тази сила е функция на разстоянието. Единъ пластъ материя, разстланъ по една повърхнина, привлича една материална точка съ сила, която зависи отъ всички отдѣлни сили, съ които безкрайно многото елементи на този пластъ привличатъ тази точка; тази сила, между друго, ще зависи и отъ формата на самата повърхнина, т. е. отъ начина, по който частицитѣ на пласта сѫ групирани. Тя зависи отъ всички стойности, които фунцията $f=\frac{m}{r^2}$ взема по повърхностьта и се мѣни когато тази повърхнина се деформира.

Да вземемъ другъ случай. Всѣка точка отъ повърхнината на единъ проводникъ се подържа при една опрѣдѣлена температура. Температурата на една вѫтрѣшна точка на проводника ще зависи отъ температурата на всѣка точка на повърхнината и ще се мѣни когато проводникътъ се деформира.

Както въ горния случай, тъй и тукъ имаме добъръ примѣръ за функция, която зависи отъ всичкитѣ безкрайно много значения, които друга или други функции взиматъ въ дадена область.

Изучаването свойствата на тѣзи функции е свързано съ голѣми мжчнотии. Но тѣзи мжчнотии сж значително по-малки отъ мжчнотиитѣ, които се срѣщатъ при изучаване функциитѣ на много голѣмъ брой промѣнливи. Изобщо работата на математика се значително олеснява, неговитѣ формули се много опростяватъ, когато, вмѣсто много промѣнливи, разглежда безброй много промѣнливи; когато, вмѣсто малки величини, разглежда безкрайно малки величини, или, както математицитѣ се изразяватъ, когато разглежда граничнитѣ случаи; когато въ дадения случай разширимъ понятието функция тъй, че то да обема и случая когато числото на зависимитѣ промѣнливи е безкрайно голѣмо, т. е. по-голѣмо отъ всѣко намислено голѣмо число.

И за функциитѣ на безкрайно много промѣнливи при извѣстни условия може да се установи формула аналогична на формулата (I), само че въ дадения случай a ще прѣдставлява съвокупността отъ всички стойности, които дадена функция може да вземе въ дадена область, а $\varepsilon\alpha$ съвокупностьта отъ промѣнитѣ на всѣка една отъ тѣзи стойности. Тукъ α дава характера на промѣнитѣ въ системата стойности въ комплекса a, стойности, които сами сж нѣкаква функция на друга промѣнлива, а ε дава голѣмината на тѣзи промѣни.

Ако означимъ съ Δf промѣната на стойностьта на функцията, която отговаря на промѣната $\varepsilon\alpha$ на комплекса a, ще имаме тукъ

$$\Delta f = \varepsilon A$$

Но, въ дадения случай, коефициентътъ А зависи, не само отъ характера на явлението, не само отъ функцията, която изразява неговия законъ и отъ стойноститѣ на безброй многото промѣнливи, които образуватъ комплекса a, но и отъ характера на настжпилитѣ въ него промѣни.

Тъй напримѣръ промѣната въ силата, съ която единъ сферичен хомогенѣнъ пласть материя привлича една вънкашна материална точка, зависи, не само отъ голѣмината, но и отъ характера на деформацията на пласта. Даже при извѣстни деформации, когато напримѣръ неговата повърхнина расте, но пластътъ запазва сферичната си форма, колкото голѣми и да бждатъ тѣзи деформации, привлекателната сила на пласта ще остане непромѣнена. На този примѣръ личи много ясно влиянието на характера на деформациитѣ, влиянието на характера на промѣнитѣ на комплекса a върху промѣнитѣ на самата функция.

Горнята формула може лесно да се разпростре и за случаи на по-вече комплекси a, b, c отъ безброй много елементи. Всѣки единъ отъ тѣзи комплекси ще даде въ формулата единъ членъ аналогиченъ на члена εA.

При извѣстна групировка на елементарнитѣ дѣйствия въ комплекси отъ безкрайно много елементи a, b, c и при даденъ характеръ на съотвѣтнитѣ промѣни α, β, γ може да се случи единъ отъ косфициентитѣ A, B, C да добие много голѣма стойность сравнително другитѣ. Да допустнемъ, че това е коефициентътъ A. Въ такъвъ случай промѣнитѣ на $f(a, b, c)$ ще зависятъ главно отъ голѣмината на промѣнитѣ въ a и отъ тѣхния характеръ; явлението като че не ще зависи отъ групитѣ b, c. За да изучимъ влиянието на тѣзи групи, трѣбва да изучимъ явлението въ момента когато прѣобладаватъ стойноститѣ на B или C.

Като изучваме явленията при различни обстоятелства, ний откриваме влиянието на различни фактори или групи фактори и получаваме различни картини за хода на едно и сѫщо явление, картини, които на прѣвъ погледъ нѣматъ нищо общо.

Ще взема единъ познатъ примѣръ изъ физиката. Да вземемъ учението за електричеството. Отъ една страна имаме явленията на статическото електричество съ неговитѣ закони, които сѫ пълно копие на законитѣ въ учението за маситѣ въ механиката, а отъ друга страна имаме явленията на електрическия токъ, които сѫ единъ съвсѣмъ отдѣленъ класъ явления. Но не стига това. Каква общность има между горнитѣ явления и явленията на свѣтлината изобщо (не говоря тукъ за електрическото освѣтление)? Тукъ имаме явления съвсѣмъ различни по своя характеръ. Но въ сѫщность имаме три различни картини на едно и сѫщо явление на етера. Физикътъ, който изучава явленията на етера при условия, при които коефициентътъ A прѣодолява, открива явленията на статическото електричество и тѣхнитѣ закони. Физикътъ, който изучава тѣзи явления при условия, при които прѣобладава B, открива явленията на електрическия токъ и физикътъ, който изучава сѫщитѣ явления когато C прѣобладава, открива явленията на свѣтлината, явленията на лѫчистата енергия.

Нѣщо подобно имаме и въ общественитѣ науки. Едни изучаватъ развитието на човѣшкото общество въ дадено врѣме при дадени условия и намиратъ, че географичнитѣ условия сѫ били главния факторъ на това развитие; други изучаватъ това общество когато машината и капиталътъ играятъ първенствуваща роля и сѫ наклонни да изтъкнатъ тѣхъ като главенъ факторъ, трети изучаватъ другъ моментъ на това развитие и изтъкватъ духовния животъ и неговата организация, като фактори и др. т. Единъ математикъ би казалъ, че това сѫ различни коефициенти въ математичния изразъ на единъ и сжщъ законъ, коефициенти, които сами се мѣнятъ. Само когато добрѣ изучимъ тѣзи коефициенти и открiемъ законитѣ, по които се тѣ мѣнятъ, само тогава ще можемъ да се издигнемъ до едно по-високо схващане, само тогава ще можемъ да установимъ законитѣ на общественото развитие. До тогава ний ще бждемъ често блазнени да вземемъ приблизителнитѣ закони на отдѣленъ епизодъ на това развитие като законъ на самото развитие.

До тукъ ний разглеждахме само непрѣкжснати функции и се спрѣхме на нѣкои отъ тѣхнитѣ важни свойства, които въ Анализа се установяватъ чрѣзъ прѣминаване къмъ граници, т. е. като приемемъ, че промѣнитѣ на независимитѣ промѣнливи могатъ да бждатъ по-малки отъ всѣко дадено колкото си щемъ малко, или че броятъ на промѣнливитѣ е по-голѣмъ отъ всѣко намислено голѣмо число. Това прѣминаване къмъ граница е допустимо при допущането на непрѣкжснатость въ промѣнитѣ на независимитѣ промѣнливи и тѣхнитѣ функции. Но явленията, природнитѣ явления, не сж тъй непрѣкжснати. Най-хомогенната материя не е хомогенна при много малки обеми, които, наблюдавани подъ ултра-ултра микроскопъ, ще ни покажатъ чудовищни скокове въ плътностьта на материята, която ги запълня. Имаме молекули, йони, корпускули раздѣлени съ празно пространство, етеръ както казватъ физицитѣ. Но не само материята е корпускуларна. Съврѣменнитѣ издирвания въ Физиката показватъ, че трѣбва да приемемъ корпускуларность, прѣкжснатость и за енергията. (Трѣбва да приемемъ напримѣръ, че скоростьта на една въртилешка (пумпалъ) може да се мѣни само на скокове). Имаме *молекули* при материята, имаме *кванти* при енергията.

Щомъ е тъй, природнитѣ закони, които установяваме, сж само приблизителни. Но пжтьтъ слѣдванъ за да дойдемъ до тѣхъ ни дава възможность да прѣсмѣтнемъ максималната сторена грѣшка и да редуцираме тази грѣшка колкото си щемъ.

Тази дрѣха, която кроимъ на природата à la mode Mathematique, прилѣга не съвсѣмъ плътно къмъ нейното тѣло. Разгледаме ли я по-отблизо ний ще забѣлѣжимъ части незначителни, дребни наистина, останали непокрити и мѣста дѣто дрѣхата е халтава. Едни отъ тѣзи недостатъци се дължатъ на липсата на достатъчно материали и врѣме за нейната изработка; но други се дължатъ на самата кройка, на самитѣ методи. Единъ сръченъ математикъ би могжлъ да прѣкрои тази дрѣха, да закрие голотитѣ, които се хвърлятъ на очи, да посвие тукъ-тамѣ по-широкитѣ ѝ мѣста, но, ако разгледаме тъй прѣкроената дрѣха подъ микроскопа, ще забѣлѣжимъ сжщитѣ недостатаци.

Ще илюстрирамъ мисъльта си съ единъ примѣръ. Небесната механика първа отъ математичнитѣ науки достига извѣстно съвършенство. Нейниятъ основатель Нютонъ е и основательтъ на съврѣменната математика. Но нескромни очи откриха извѣстни недостатъци въ тъй построената наука, часть отъ които бѣха поправени отъ неговитѣ послѣдователи. Но и тъй поправена всѣки виждаше, че макаръ нейнитѣ изводи, и да ни задоволяватъ за нѣколко вѣка при съврѣмената точность на наблюденията, но че тѣ не сѫ точни за вѣковетѣ и за хора, които би разполагали съ по-точни' уреди за наблюдение. И ето Поанкаре се заема да прѣкрои тази часть отъ дрѣхата, като употрѣбява по-тънки срѣдства на анализа. Методата на прѣработката си остана сѫща — сѫщи останаха и недостатъцитѣ, само че тѣ тука сѫ неуловими за насъ при съврѣменитѣ наблюдателни срѣдства.

За по-съвършена дрѣха трѣбватъ други методи. И ето че се явяватъ, тъй да кажа, микроскопиститѣ и ултрамикроскопиститѣ въ математиката, които не се задоволяватъ да изучаватъ само непрѣкѫснатитѣ функции, но се стараятъ да класифициратъ въ голѣми групи и прѣкѫснатитѣ функции и да изучатъ тѣхнитѣ закони. Въ тази посока се очертава днесъ развитието на математиката. Нѣкои интересни резултати въ тази посока имаме вече на лице. Но ний сме още въ зората на това развитие. Много е сторено изобщо до днесъ, но въ бѫдещето е бѫдещето на математиката.

Драги слушатели,

Азъ ще се чувствувамъ извънредно щастливъ, ако въ течение на моя курсъ успѣя да подържа у васъ интересъ къмъ туй, което има да се гради и възбудя у васъ любовь къмъ творческа работа; ако успѣя да ви туря въ по-интименъ контактъ съ науката на която вий и азъ посвѣтяваме нашитѣ най-добри години. Но при тази си работа не трѣбва да забравяме че нашитѣ математични построения сѫ една много или малко сполучлива картина на туй, което става около насъ, картина, която всѣки моментъ трѣбва да се ретушира, и че не трѣбва да въздигаме нашитѣ формули въ кумиръ. Нека си спомняме винаги библейския изразъ „не сотвори себе кумира“. Само при това условие науката прогресира и ний прогресираме съ нея.