Година X-XI 1913/14, 1914/15 год. Книга I.

ГОДИШНИК
на
СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
Физико-математически факултет

Начало и развитие на Математическия Анализъ, въ свръзка съ Геометрията, Механиката и Физиката.

(Встжпна лекция, четена на 9 октомврий 1914 год.)

Отъ доцента Ив. Цѣновъ.

Почитаемо събрание,

Съ настоящата си лекция, азъ съмъ си поставилъ за цѣль да покажа, до колкото това е възможно въ една лекция, развитието на Матем. Анализъ въ зависимость отъ Геометрията, Аналитичната Механика и Математ. Физика, отъ което ще се види, каква е връзката между тия науки, които показватъ едно отъ най-могжщитѣ усилия на човѣшкия умъ въ търсенето на истината.

Съ откриването Аналитичната Геометрия на Декарта, различна отъ тая на старитѣ, чрѣзъ общитѣ и систематични идеи, които сж положени въ основата ѝ, и инфинитезималното смѣтане, се започва модерната математика. Тѣзи открития въ XVII вѣкъ произведоха една революция въ матетамическата наука. Най-голѣмия прогресъ извършенъ отъ Декартъ, се дължи на това, че той видѣ отъ една страна, че положението на една точка въ равнината е съвършенно опрѣдѣлено, чрѣзъ разстоянията ѝ до двѣ постояни, прѣкарани подъ правъ жгълъ, прави въ нея, и отъ друга, че едно неопрѣдѣлено уравнение отъ двѣ промѣнливи може да бжде удовлетворено чрѣзъ безброй много стойности на промѣнливитѣ, чиито стойности опрѣдѣлятъ координатитѣ на извѣстно число точки, ансамбла на които образува една крива.

Гледището, на което се поставиха основателитѣ на науката на движението — Галилей, Хюгенсъ и Нютонъ, имà сжщо грамадно влияние върху ориентировката на Математ. Анализъ. Галилей, човѣкъ съ модеренъ умъ, не се пита, защо тѣлата падатъ, но какъ падатъ, споредъ какви закони се движи едно свободно падаще тѣло. Той можà да различи, че въ природнитѣ явления, „подбудителнитѣ обстоятелства на движението“ — силитѣ — произвеждатъ *ускорения*. Въ всичкитѣ се изводи, той слѣдва единъ принципъ отъ голѣма научна плодовитость, който може точно да се нарѣче

принципъ на непрѣкжснатостьта, и, който се състои въ това, да се измѣняватъ постепенно и до колкото е възможно обстоятелствата на единъ кой да е частенъ случай, за който искаме да имаме ясна прѣдстава. Никоя друга метода не ни дава възможность за тъй ясно разбиране на природнитѣ явления. Неговитѣ изучвания върху движението на прожектила го довеждатъ до откриването основния принципъ въ Динамиката *за независимостьта на дѣйствието на една сила* и съ него той идва до раждането на модерната Динамика. Хюгенсъ, слѣдвайки пжтя на Галилея, положи основитѣ на Динамиката съ едно задоволително изложение, а Нютонъ, човѣкъ съ необикновена гениалность, направи отъ това една точна наука.

Сега вече съ геометрията на Декарта и съ появяването на Динамиката се даде начало и на Математ. Анализъ.

Първитѣ проблеми отъ Интегралното Смѣтане, които бѣха положени и рѣшени, сж проблемитѣ за квадратурата и кубатурата. Въ началото на XVII вѣкъ Кавалири открива методата на *индивизиблитѣ* (indivisibles), прилична на тази на безкрайно малкитѣ, посрѣдствомъ която може да се опрѣдѣлятъ квадратурата и кубатурата на нѣкои проблеми и центъра на тежестьта на тѣлата, чрѣзъ търсене границата на една сума отъ безброй много безкрайно малки величини. Индивизибелното смѣтане, замѣстено веднага слѣдъ откриването му съ нашето интегрално, може да бжде разгледано, като еквивалентно на това послѣдното, ограничено съ интегруване на диференциални функции въ нѣкои по-прости случаи, но се различава отъ него, понеже сумуванията се извършватъ директно. Ще се види, може би, чудно, че интегралното смѣтане се е появило прѣди диференциалното, обаче това не трѣбва да ни учудва, тъй като въпросътъ за разрѣшение на нѣкои отъ горнитѣ проблеми се е поставилъ още отъ много старо врѣме. Архимедъ, още въ края на на III вѣкъ пр. Христа, е далъ доказателства за квадратурата на параболата и на Архимедовата спирала. Може да се каже, че, прѣди изнамѣрването на инфинитезималното смѣтане, по-главнитѣ проблеми отъ интегралното бѣха рѣшени чрѣзъ тогава употрѣбяванитѣ функции.

За диференциалното смѣтане положението бѣше почти сжщото: първиятъ въпросъ, който бѣ положенъ, е този за прѣкарване тангентата къмъ кривитѣ. Старитѣ не бѣха конституирали една обща метода. Въ Геометрията си, Декартъ пръвъ публикува една такава, приложима за всичкитѣ алгебрични криви. Въ сжщото врѣме Ферма изложи друга метода, съ която прѣдвѣстяваше консепцията на безкрайно малкитѣ. Но новата метода на Баровъ, за намѣрването на тангентата чрѣзъ неговия трижгълникъ, образуванъ отъ

една безкрайно малка хорда и безкрайно малкитѣ нараствания на абцисата и ординатата, водѣше съвсѣмъ направо къмъ изнамѣрването на диференциалното смѣтане.

Въ дѣйствителность началото на понятието *производна* се крие въ подвижностьта на нѣщата и въ по-голѣмата или по-малка бързина, съ която се извършватъ явленията, това което добрѣ изразяватъ наименованията *флюенти*[1]) (fluentes) и *флюксии* (fluxions), съ които си е служилъ Нютонъ. Той допуща, че всичкитѣ геометрични величини могатъ да бждатъ разгледани, като образувани чрѣзъ непрѣкжснато движение и дефинира количеството, тъй образувано, флюента, а скоростьта на величината въ движение—флюксия. И тогава имаме два вида проблеми за рѣшаване: прѣдметъ на първия е, да се намѣри флюксията отъ релацията на флюентитѣ, нѣщо еквивалентно съ дериварирането; прѣдметъ на втория, или методата обратна на флюксиитѣ, е да се намѣри флюентата, като се тръгне отъ релацията за флюксиитѣ, т. е. дохожда се или до интегрирането, което Нютонъ наричаше квадратура, или до рѣшението на едно диференциално уравнение, което за него бѣше обратната метода на тангентитѣ. Това ново смѣтане е еквивалентно на онова, което ние наричаме днесъ теория на производнитѣ на алгебричнитѣ функции въ нѣкои прости случаи.

Нютонъ почна да прилага новитѣ аналитични методи, не само на много проблеми отъ Механиката на твърдитѣ тѣла и флюидитѣ, но и въ слънчевата система, и тъй ансамблътъ отъ земната и небесна Механика бѣ съединенъ въ областьта на математиката. Безъ съмнение Нютонъ употрѣби флюксионното смѣтане, за да получи по-голѣмата часть отъ откритията си, но изглежда да е мислилъ, че, ако установи новитѣ доказателства съ помощьта на една нова наука, то съврѣменницитѣ му не биха добрѣ разбрали истинностьта и важностьта на откритията му, затова той е далъ геометрически доказателства на всичкитѣ си резултати и прѣдставя „*Principa*" подъ такава форма, за да бжде разбранъ.

Обаче, модерниятъ Анализъ произхожда направо отъ работитѣ на Лайбница. Съ Бернули и Ферма, особено съ Лайбница, науката се обвързва въ пжтищата, които водятъ къмъ Математическия Анализъ. Чрѣзъ негова систематиченъ умъ и благодарение на многото проблеми, които е третиралъ, както и неговитѣ послѣдователи Жакъ и Жанъ Бернули, той показа по единъ рѣшителенъ начинъ пжтя на математическата наука. Лайбницъ за пръвъ пжть въ послѣднитѣ години на XVII вѣкъ произнася думата *функция*. Цѣлата тая наука почива върху понятията за *число* и фун-

[1]) Думитѣ флюента и флюксия могатъ да бждатъ разгледани като интегралъ и производна.

кция, изучването на която съставя главния прѣдметъ на Анализа. Отъ неговитѣ мемоари, въ които се намиратъ зачатъци на методи, останали до днесъ, се вижда, че принципътъ на непрѣкжснатостьта е явно допуснатъ и още, че новата метода за прѣсмѣтване се основава върху употрѣблението на *безкрайно малкитѣ*. Той обясни, че геометрически стойностьта $\frac{dy}{dx}$ може да бжде разгледана като отношение на двѣ крайни количества. Славата на неговото име почива върху здрава основа, защото то е свързано по единъ нераздѣленъ начинъ съ единъ отъ главнитѣ инструменти на модерния Анализъ — *висшето смѣтане*, сжщо както основа на Декарта, единъ другъ философъ, — съ Аналитичната Геометрия. Лайбницъ, Жакъ и Жанъ Бернули, послѣдниятъ — основатель на теорията на изопериметритѣ, бѣха първитѣ математици, които фамилиаризираха другитѣ съ употрѣбението на новото смѣтане.

Идеитѣ, върху които се базира инфинитезималното смѣтане, могатъ да се прѣведатъ било посрѣдствомъ флюксиитѣ на Нютона, било посрѣдствомъ *диференциалитѣ* на Лайбница. Нютонъ употрѣби думата флюксия въ 1666 година, но чакъ до 1693 г. никакво специално съчинение не бѣ публикувано по този прѣдметъ. Колкото за появяването на диференциалитѣ може съ голѣма вѣроятность да се фиксира датата 1675 година. Фактъ е, че диференциалната задача се длъжи на Лайбницъ, но не се знае положително, дали общата идея на смѣтането е била получена отъ Нютона, или тя принадлежи на Лайбница. Но както и да бжде, поголѣмата часть отъ новитѣ писатели се спиратъ на заключението, че вѣроятно Лайбницъ и Нютонъ сж открили инфинитезималното смѣтане независимо единъ отъ други.

Задачата на диференциалитѣ е за прѣдпочитане въ приложенията прѣдъ тая на флюксиитѣ, защото тя обобщава въпроситѣ и за извѣстни проблеми, напр. за вариационното смѣтане, тя е почти необходима. Но трѣбва да се забѣлѣжи, че въ XVII вѣкъ методитѣ на инфинитезималното смѣтане не бѣха още систематично изложени, и затова и двѣтѣ задачи бѣха еднакво добри. Развитието на това смѣтане бѣ важно дѣло на математицитѣ отъ I-та половина на XVIII вѣкъ. Диференциалната задача бѣ приета отъ всички математици, съ изключение на тия въ Англия. Нейното приложение отъ Айлеръ, Лагранжъ и Лапласъ прѣзъ II-та половина на сжщия вѣкъ установи прѣвъзходството на диференциалното смѣтане върху това на флюксиитѣ. Прѣвеждането на „*Principa*“ на езика на модерния Анализъ и подробното изложение Нютоновата теория съ помощьта на този Анализъ, бѣ дѣло на Лапласа. По причина, може би, на народна завистъ, английската школа

е живѣла по-вече отъ единъ вѣкъ безъ сношение съ математицитѣ на континента. Едва въ 1820 година новитѣ аналитични методи бѣха приети въ Англия и отъ тази дата се вижда, че компатриотитѣ на Нютона взеха отново една широка часть въ прогреса на математиката.

Нека кажемъ нѣколко думи върху принципитѣ на новото смѣтане. Инфинитезималната метода на Лайбница ни снабдява съ уравненията на най-сложнитѣ проблеми, на основание слѣднята двойна операция: да се замѣстятъ реалнитѣ елементи на единъ проблемъ съ помощни елементи, които могатъ да се приближаватъ неопрѣдѣлено къмъ първитѣ; да се унищожатъ чисто и просто въ прѣсмѣтането количествата, способни да ставатъ безкрайно малки относно тѣзи, на които сме си прѣдложили да опрѣдѣлимъ границитѣ. Голѣма е разликата въ мжчнотиитѣ, които трѣбва да се опрѣдѣлятъ въ търсене на уравнения съ крайни количества и въ тѣзи на диференциални уравнения на единъ проблемъ. Ако имаме едно дѣйствие, зависяще наведнажъ отъ нѣколко зависими или независими причини, то въ първитѣ, частичното нарастване на дѣйствието, отговаряще на крайното нарастване на една отъ причинитѣ, би се изразило чрѣзъ една релация често доста усложнена, обаче законътъ за образуването на тоталното дѣйствие, посрѣдствомъ частичнитѣ, би билъ изобщо още по-много комплициранъ. Диференциалната метода унищожава отнапрѣдъ тѣзи усложнения. Интегралното пъкъ смѣтане, което има за прѣдметъ да се достигне отъ диференциалното уравнение до такова съ крайни количества се състои само отъ начини за прѣсмѣтане, тъй като се касае само да се получатъ уравнения, които, диференцирани, да възпроизвеждатъ прѣдложенитѣ диференциални уравнения. Новата инфинитезимална метода е отъ голѣмо значение за аналиста. Всѣки пжть, когато едно количество се измѣнява по единъ непрѣкжснатъ начинъ, слѣдвайки извѣстенъ законъ, което е почти всѣкога тъй въ природата, диференциалното смѣтане ни позволява да слѣдваме нарастването или намаляването му, а интегралното пъкъ ни дава срѣдството да намѣримъ отново първоначалното количество, на основание формулата, която дава закона на вариацията. По такъвъ начинъ природнитѣ явления се управляватъ чрѣзъ диференциални уравнения, които можемъ всѣкога да образуваме, тъй като наблюдението и опитътъ ни даватъ за всѣка категория явления извѣстни физични закони. Такава е въ своята сжщность знаменитата метода на германския философъ Лайбницъ.

Диференциалното Смѣтане, както и Аналитичната Геометрия и Динамиката — станаха главни орждия за бждещия прогресъ на

математическата наука. Тѣзи открития бѣха единъ грамаденъ прогресъ, единъ отъ най-голѣмитѣ, които човѣшкия умъ е направилъ, и първитѣ успѣхи бѣха дѣйствително такива, както казва Бертрандъ въ съчинението си, че можеше да се прѣдположи, да сж побѣдени отнапрѣдъ всичкитѣ мжчнотии, които се срѣщатъ въ науката.

Новитѣ методи, които се явиха въ края на XVII вѣкъ, се развиха още по-вече въ XVIII вѣкъ. Изучването и класификацията, отъ чисто аналитична гледна точка на проститѣ функции е особено интересно. Съ това идеята за функция се развои малко по-малко. Многобройнитѣ проблеми, които се изпрѣчватъ прѣдъ математицитѣ, не имъ даватъ врѣме да изслѣдватъ принципитѣ; основитѣ даже на новото смѣтане се изясняватъ бавно, и фразата на д'Аламберта „allez en avant, la foi vous viendra" е много характеристична за тази епоха. Отъ третиранитѣ проблеми прѣзъ този вѣкъ се сжщо видѣ и ролята на Анализа: да създава общи схващания, обобщения на повдигнати въпроси, които прѣминаватъ много първоначалната идея, и то посрѣдствомъ проста игра на неговитѣ символи. Разбира се, че въ всѣки случай обобщенията се пояснятъ чрѣзъ наблюдението и опита и послѣ, посрѣдствомъ смѣтането, се показватъ по-нататъшнитѣ слѣдствия. Подъ натиска на проблемитѣ, които полагатъ Механиката, Геометрията и Физиката виждаме да се родатъ и развиятъ всичкитѣ най-голѣми подраздѣления на Анализа, особено въ края на този вѣкъ, слѣдствие на което намираме най-много аналитични изнамѣрвания.

Проблемитѣ за изопериметритѣ, принципътъ на виртуалнитѣ скорости, повдигнати отъ Бернули, и теорията на геодезичнитѣ линии, сж отъ най-важнитѣ, понеже тѣ дадоха раждането на *вариационното смѣтане*. Айлеръ, на когото знаменититѣ съчинения върху диференциалното смѣтане, държаха тогава забѣлѣжително мѣсто и сж служили като моделъ на много модерни съчинения върху сжщия прѣдметъ, изложи общата идея на вариационното смѣтане, но пълното му развитие бѣ дѣло на Лагранжа. Съ откриването на това смѣтане се забѣлѣзва още по-интимната връзка между Анализа и Механиката, защото слѣдъ индуктивния периодъ на първото раждане на Динамиката се достига до дедуктивния, дѣто се старае да се даде на принципитѣ една окончателна форма. Ролята на Анализа бѣше доста голѣма за ясното разбиране на Механиката. Д'Аламбертъ, на когото идеитѣ сжществуватъ въ сегашната Механика, въ *Traité de Dynamique* произнася принципа, който носи името му: че инерчнитѣ сили сж равни и противоположни на

силитѣ, които произвеждатъ ускоренията. Съ това си съчинение, той дава една директна и обща метода, да се рѣшатъ, или наймалкото да се поставятъ въ диференциални уравнения, всичкитѣ проблеми на Механиката, които можемъ си въобрази. Тази метода извежда законитѣ на движението на тѣлата отъ оная на тѣхното равновѣсие. И тъй тя довежда Динамиката въ Статиката. Този принципъ, приложенъ за равновѣсието и движението на флюидитѣ, довежда д'Аламберта за пръвъ пѫть до частно диференциално уравнение. Такива уравнения наскоро започнаха да се явяватъ и въ трепетливитѣ струни и инфинитезималната Геометрия на повърхнинитѣ. Слѣдъ като Айлеръ разшири и допълни дѣлото на прѣдшественицитѣ си, явява се, Лагранжъ, съ талантъ необикновенъ, който развии инфинитезималното смѣтане и механичната теория, като имъ даде формата, подъ която ги познаваме сега. Този великъ човѣкъ дефинира скоростьта въ промѣнливото движение. Изобщо, казва той, въ всѣко праволинейно движение, въ което изминатия пѫть е дадена функция на врѣмето, функцията prime (първата производна) на тази функция ще прѣдставлява скоростьта и функцията seconde (втората производна) ще прѣдставлява ускорителната сила въ единъ кой да е моментъ. Отъ тукъ виждаме, че първитѣ и вторитѣ производни се прѣдставляватъ естествено въ Механиката, дѣто тѣ иматъ опрѣдѣлени стойности и значения. Въ съчинението му *Mécanique Analytique*, той установи закона на виртуалната работа и отъ този само принципъ изведе съ помощьта на вариационното смѣтане цѣлата Механика на твърдитѣ тѣла и флюидитѣ. Намѣсто да слѣдва движението на всѣка индивидуална часть отъ една материална система, както го правѣше д'Аламбертъ и Айлеръ, той показа, че ако конфигурацията на системата е опрѣдѣлена чрѣзъ едно достатъчно число параметри, число точно равно на това на свободитѣ на независимость, които притежава системата, то кинетическата и потенциалната енергии могатъ да бѫдатъ получени въ функция отъ тѣзи параметри и тогава диференциалнитѣ уравнения на движението се получаватъ отъ тѣхъ чрѣзъ едно просто диференциране.

Но трѣбва да се забѣлѣжи, че прѣзъ всичкия този вѣкъ чистата теория не е тъй уякчена. Лангранжъ почувствува тази недостатъчность и съ *Théorie de fonctions analytiques*, *Leçons sur le calcul des fonctions*, които съчинения могатъ да бѫдатъ разгледани като начална точка на търсенията отъ Коши, Якоби и Вайрщрасъ, се стрѣмѣше да даде една здрава основа на Анализа, като се интересуваше по единъ съвсѣмъ специаленъ начинъ за изучването на чистата математика. Той потърси и получи абстрактни

резултати отъ единъ висшъ редъ и остави да се направятъ приложенията отъ други. И наистина една доста важна часть отъ откритията на неговия съврѣменикъ Лапласъ се заключава въ приложението формулитѣ на Лагранжа въ природнитѣ явления, напр. въпросътъ за вѣковото ускорение на луната е неявно заключенъ въ работитѣ на Лагранжа.

Въ края на XVIII вѣкъ и особено въ началото на XIX вѣкъ се явиха още по-голѣми приложения на Анализа. Най-важнитѣ отъ тѣхъ бѣха въпроситѣ отъ небесната Механика, третирани чрѣзъ познаването законитѣ на гравитацията, съ които въпроси се свързватъ имената на най-великитѣ математици: Лапласъ, Лагранжъ и Поасонъ. Тѣзи тримата, особено Лагранжъ, доказаха стабилностьта на слънчевата система. Лапласъ, който се счита основатель и на аналитичната теория на вѣроятноститѣ, съ *Origine du Monde* и *Mécanique céleste,* довърши тълкуването на свѣтската система и положи основитѣ на Молекулярната Физика, а и съ това се отвориха нови пѫтища за експерименталнитѣ науки. Неговото прочуто уравнение върху привличането се срѣща почти въ всички клонове на Математическата Физика. Теорията на динамическото електричество и на магнетизма, съ Ампера, а по-послѣ съ Гауса, даде начало на голѣми прогреси. Лагранжъ, Лапласъ и Лежандъръ, послѣдния забѣлѣжителенъ още и съ работитѣ си върху теорията на числата и елептичнитѣ функции, създадоха една школа съ двѣ течения: едното на Поасонъ, Амперъ и Фурие,—да прилага Математическия Анализъ въ Физиката и другото на Монжъ, Карно и Понселе — да създаде модерната Геометрия. Великиятъ математикъ Фурие започва да създава частни диференциални уравнения, които управляватъ температурата. Той, като говори за математическия Анализъ, казва: „Не може да има тамъ говоръ по-всеобщъ и по-простъ, по-свободенъ отъ грѣшки и неясности, т. е. по-достоенъ да изрази неизмѣняемитѣ отношения на естественитѣ твари. Разгледванъ отъ тази гледна точка, той се слѣдователно протѣга като самата природа, той дефинира всичкитѣ чувствителни отношения, мѣри врѣмето, пространството, силитѣ, температурата; тази мѫчна наука се развива бавно, но тя запазва всичкитѣ принципи, които е приела единъ пѫть“.

За едно частно диференциално уравнение *условията на границитѣ,* които позволяватъ да се опрѣдѣли едно рѣшение, сѫ, за Фурие, дадени отъ физичния проблемъ. Методитѣ, които е слѣдвалъ, сѫ служили за модели на физицитѣ математици прѣзъ I-та половина на XIX вѣкъ. Една отъ тѣхъ се състои, да се образува серия съ извѣстни прости рѣшения и тъй Фурие получава първитѣ

образци на развития по-общи, отколкото тригонометричнитѣ. Сл. това се разширява доста и понятието за функция, тъй като математицитѣ отъ XVII вѣкъ подъ функции сѫ разбирали само тѣзи, които Айлеръ наричаше непрѣкѫснати функции. Проблемътъ за трепетливитѣ корди разшири това понятие, имено, че една функция подъ аналитична форма може да се прѣдстави и съ безкраенъ редъ. Фурие, въ единъ прочутъ мемоаръ въ 1807 год. и по-късно въ *Théorie analytique de la chaleur*, показа крайната важность на тригонометричнитѣ серии. Той пръвъ се осмѣли да твърди, че всѣка функция може да бѫде прѣдставена между 0 и 2π чрѣзъ едно развитие отъ това естество, и това, което е най-важното, че едно и сѫщо развитие може между тѣзи граници да прѣдставлява функции, които биха се разгледали като различни, т. е. което отговаря графически на дѫги отъ различни криви.

Изобщо може да се каже, че въ началото на XIX вѣкъ математиката има голѣмо приложение въ Физиката, и, че това развитие на математическата наука имаше за начална точка работитѣ на Нютона и Хюгенса върху теорията на свѣтлината, но въ тази епоха това развитие се опира на точни наблюдения. Много слѣдствия сѫ били получени въ Физиката отъ приложението на тая наука въ резултатитѣ отъ наблюдението и опита, но това, което липсва днесъ е да могатъ да се сформируватъ нѣколко прости хипотези, отъ които би било възможно да се изведатъ чрѣзъ Математич. Анализъ наблюдаванитѣ явления. Ако напр. бѣше възможно да се каже въ какво се състои електричеството, ние бихме могли да формулираме нѣколко прости закони, отъ които бихме извели, чрѣзъ Анализа, наблюдаванитѣ явления по сѫщия начинъ, както Нютонъ извежда всичкитѣ резултати на физическата астрономия отъ закона за гравитацията. Всичкитѣ търсения изглеждатъ впрочемъ да се означи, че сѫществува между различнитѣ клонове отъ Физиката една вѫтрѣшна релация.

Прѣзъ това врѣме, началото на XIX вѣкъ, когато математиката има голѣмо приложение въ Физиката, се създаде и модерната Геометрия. Тя е спомогнала твърдѣ много за подновяването на математическата наука, като прѣдлага въ търсенията единъ новъ и плодовитъ пѫть. Хубавитѣ геометрически доказателства на Хюгенса, Нютона и Клеро бѣха забравени или прѣнебрѣгнати. Карно, чрѣзъ *l'Essai sur les transversales* и *la Géometrie de position*; Монжъ, особно чрѣзъ създаването на Дескриптивната Геометрия; Понселе, съ *Traité des propriétés des figures*, съ което се възроди синтетическата Геометрия, — дадоха съ тѣзи съчинения да се усъвършенствуватъ срѣдствата, употрѣбени въ всичкитѣ изкуства,

и сѫщеврѣмено да се роди една обща и чисто рационална Геометрия, или другояче казано, да се роди една *крайна* Геометрия, за разлика отъ инфинитезималната. Монжъ, съ новитѣ понятия върху кривината на кривитѣ и хубавитѣ теории върху образуването на повърхнинитѣ, даде основитѣ на *инфинитезималната* Геометрия и откри нови пѫтища за търсене. Но геометрическитѣ методи получиха най-голѣма сила вслѣдствие публикациитѣ на Гауса, който тамъ третираше въпроситѣ съ помощьта на чистия Анализъ и това даде потикъ на французскитѣ математици да развиятъ теорията на пространственитѣ криви линии.

Дохождаме най-послѣ до миналия вѣкъ. Прѣзъ тази епоха математическата мисъль започва да взема по-голѣма сила. Проблемитѣ се изчерпватъ за извѣстно врѣме. Мѫчнотитѣ, останали необясними, отдадоха необходимитѣ прогреси на чистата теория. Пѫтьтъ, въ който трѣбваше да се движи тя, бѣше опрѣдѣленъ. Тя можеше да върви тамъ независимо, безъ да се губи необходимото допиране съ проблемитѣ, които полага Геометрията, Механиката и Физиката. Този вѣкъ е създалъ въ чистата математика много нови клонове: теория на числата или висшата Аритметика, теория на формитѣ и групитѣ, теория на функциитѣ съ кратна периодичность или висша Тригонометрия и най-сетнѣ обща теория на функциитѣ, която обгрѫща широкитѣ области на висшия Анализъ. Въ началото Гаусъ, Коши, а по-послѣ Абелъ и Дирихле опрѣдѣлиха една строга ревизия на основнитѣ принципи на математическия Анализъ. Но, отъ всичкитѣ математици прѣзъ този вѣкъ, рѫкописитѣ на Гаусъ оказаха най-голѣмо влияние по единъ постояненъ начинъ върху много клонове на математическата наука и неговитѣ търсения послужиха за основа на много нови пѫтища. Това е послѣдниятъ отъ великитѣ математици, който е ималъ почти всеобщи познания. Отъ тази епоха научната литература е взела такова разширение, че математицитѣ сѫ се форсирали да се специализиратъ и работятъ частно въ единъ или нѣколко клона отъ математиката.

Прѣзъ първата половина на XIX вѣкъ се даде строга дефиниция на непрѣкѫснатитѣ функции и тѣхнитѣ свойства, дадоха се сѫщо строги доказателства за изчисляване лицата и дължинитѣ на дѫгитѣ на кривитѣ линии и въобще на всички въпроси относно приложението на Анализа въ Геометрията, изказаха се познатитѣ правила върху сходимостьта на редоветѣ и се установи подъ условия много по-общи възможностьта на тригонометричнитѣ серии. Върху тѣзи серии, тъй много важни, ще кажемъ нѣщо по-

вече. Мемоарътъ на Дирихле върху сериитѣ на Фурие дава условията, съ които може да се твърди, че едно тригонометрично развитие съ коефициентитѣ на Фурие, прѣдставлява една дадена функция въ интервала 0 и 2π. Тѣзи условия сѫ останали въ науката подъ името *„условия на Дирихле"*. Тѣ сѫ само достатъчни, но въ тази теория условията наведнажъ необходими и достатъчни, подъ една практична форма, не сѫ още намѣрени. Интересни сѫ днесъ работитѣ на Дю-Боа-Раймондъ за развитието на непрѣкѫснатитѣ функции въ тѣзи серии и на Жорданъ за функции съ *ограничена вариация*. Но и мемоарътъ на Риманъ върху тригонометричнитѣ серии е доста прочутъ. Тамъ той изоставя гледището на Дирихле и, намѣсто да търси достатъчнитѣ условия, търси необходимитѣ. Този мемоаръ е много важенъ и въ друго отношение, имено тамъ Риманъ продължава да ревизира принципитѣ на инфинитезималното смѣтане. Въ него за пръвъ пѫть се вижда различието между функции *интегруеми* и *неинтегруеми*. Независимо отъ важностьта на тригонометричнитѣ серии въ приложенията и частно въ Математическата Физика, тѣ сѫ играли важна роля и въ развитието на понятието функция. Историята за развитието въ серии ни дава забѣлѣжителенъ примѣръ за взаимната връзка между чистия Анализъ и приложната математика.

Виждаме още, че прѣзъ този вѣкъ теорията на функциитѣ съ реални промѣнливи взема все по-вече и по-вече философски характеръ. Това се заключава непрѣко и отъ работитѣ на Римана, че една непрѣкѫсната функция нѣма необходимо производна. Вайрщрасъ пръвъ даде примѣръ за една непрѣкѫсната функция, която нѣма производна за никоя стойность на промѣнливата. Сѫщеврѣмено той показа, че непрѣкѫснатитѣ функции могатъ се развиватъ въ серии, на които членоветѣ сѫ полиноми и тѣзи серии сѫ равномѣрно сходящи въ интервала на развитието имъ. Той, като тръгва отъ единъ интегралъ, разгледанъ отъ Фурие въ теорията на топлината, доказва тази теорема доста комплицирано, но Пикардъ, тръгвайки отъ класическия интегралъ на Поасонъ въ теорията на тригонометричнитѣ серии, и Волтеръ — отъ прѣдложението, че една непрѣкѫсната функция се прѣдставя чрѣзъ една полигонална линия съ такова приближение, каквото искаме, — доказватъ теоремата по-лесно.

До тукъ въпросътъ се касаеше само за функции на реални промѣнливи. Нека сега разгледаме развитието на функции на комплексни промѣнливи или *аналитичнитѣ функции*, а така сѫщо и да се спремъ на нѣкои по-специални функции. Теорията на имагинернитѣ функции, съвсѣмъ подновена отъ Коши, е била причи-

ната на най-голѣмитѣ прогреси, които Анализътъ е направилъ в
послѣдния вѣкъ. И днесъ теорията на функциитѣ на комплексни
промѣнливи е станала единъ забѣлѣжителенъ клонъ на математ
ческия Анализъ. Тя дължи нейниятъ бързъ полетъ съ откриване
на нѣкои общи прѣдложения, между които се намиратъ на пъ
редъ теоремитѣ на Коши върху интегралитѣ, вземени по дълж
нитѣ на контуритѣ. Коши се смѣта за основатель на тази теори
Той даде на изводитѣ си една съвършена форма и съ това
отвориха нови пѫтища за търсения. Понятието за опрѣдѣле
интегралъ, взетъ въ имагинерни граници, се разшири по такъ
начинъ и прѣдставянето на една функция, чрѣзъ единъ интегра
по дължината на една затворена контура, ще запази за вина
името *интегралъ на Коши.*

Гледището на Римана се приближава до това на Коши. Т
взема за основа двѣ съвмѣстни частни диференциални уравнен
и довежда тъй теорията на функциитѣ на едно комплексно промѣ
ливо до изучването на тѣзи двѣ уравнения. Двѣтѣ уравнения
довеждатъ до уравнението $\triangle U = 0$, което съдържа цѣлата теор
на функция съ едно комплексно промѣнливо. Съ идеитѣ на Рима
върху аналитичнитѣ функции се привързва проблема отъ Ге
метрията за *географичнитѣ карти*, който ни довежда до въпро
за *съотвѣтственото изображение* на двѣ лица едно върху дру

Вайрщрасъ, на когото името е свързано по единъ неразд
ленъ начинъ съ двата клона на чистата математика: аналитич
функции и абелови, и теорията на функциитѣ, е конституира
една нова теория, различна отъ тая на Коши и Риманъ, на едн
значнитѣ аналитични функции на едно комплексно промѣнлив
имено като тръгва отъ развитието на функциитѣ въ безкрай
произведения и цѣли серии. Разложението на цѣлитѣ трансце
дентни функции, т. е. функции еднозначащи и непрѣкѫснати
цѣлата равнина, на *първоначални множители*, отъ които всѣки
произведение на единъ линеаренъ факторъ съ единъ експонен
аленъ, е една отъ най-забѣлѣжителнитѣ теореми на модерния Ан
лизъ. Тѣзи развития на функциитѣ сѫ дали начало на голѣмо чис
работи, между които най-важни сѫ тия, помѣстени въ мемоара
Митагъ-Лефлеръ, който е достигналъ тѣзи проблеми съ най-голѣ
възможна общность.

Коши и неговитѣ французки ученици, като изучвали теория
на еднозначнитѣ функции, не сѫ се спрѣли въ изучването на тѣ
особно точки, които днесъ наричаме *сѫществени особени точ*
каквато е напр. точката $z = 0$ за най-простата функция $e^{\frac{1}{z}}$. Р
глеждането на първоначалнитѣ фактори позволи на Вайщрасъ

покаже, че въ съсѣдството на една сѫществена *изолирана* точка, еднозначещата функция може да се постави подъ формата на частно отъ двѣ еднозначащи функции, които нѣматъ *полюси* въ съсѣдството на казаната точка. Той показа сѫщо, че, въ съсѣдството на една такава точка, функцията се приближава до толкова, колкото искаме до една дадена отъ напрѣдъ стойность.

Като напущаме общата теория на аналитичнитѣ функции на едно комплексно промѣнливо, да кажемъ нѣколко думи за нѣкои специални функции. Теорията на *алгебричнитѣ функции* имà началото си съ Риманъ. Неговитѣ търсения върху функциитѣ, и частно Геометрията, бѣха начало на важни развития на тия науки. Съ изучването на алгебричнитѣ функции той дойде до новата метода за третиране теорията на функциитѣ. Той прѣдставлява, като Кощи, комплексното промѣнливо върху една равнина но равнина съставена отъ толкова натрупани листца, колкото алгебричната функция, за изучване, има различни стойности, като споява тѣзи листца по дължината на извѣстни сѣчения, опрѣдѣлени чрѣзъ *критическитѣ точки* на функцията. Риманъ съ това направи алгебрическитѣ функции еднозначащи и *абеловитѣ интеграли,* които зависятъ отъ тѣхъ. Повърхнинитѣ, тъй разгледани отъ Риманъ, могатъ да се състоятъ и отъ безброй много листца; работитѣ на Поанкаре показватъ ползата, която тѣ могатъ да принесатъ въ този случай при изучването на многозначащитѣ функции. Съ алгебрическитѣ криви сѫ свързани още функциитѣ, които Поанкаре наричаше *фуксови функции*, а Клаинъ — *отоморфни.* Мемоаритѣ на тѣзи двама математици въвху този прѣдметъ сѫ най-добритѣ работи, написани въ послѣднитѣ двадесеть години върху теорията на функциитѣ. За кривитѣ отъ родъ *нула и едно,* можемъ да изразимъ координатитѣ имъ чрѣзъ еднозначущи функции на единъ параметъръ, *мероморфни* въ цѣлата равнина, т. е. съ рационални функции и двойно периодически функции. Съ теорията на послѣднитѣ сѫ свързани сѫщо елептичнитѣ функции на Абелъ и Якоби, които попослѣ Вайрщрасъ замѣни съ други, понеже опростяватъ формулитѣ и приложенията. Приложенията на елептичнитѣ функции, на които теорията е свършена, въ Геометрията сѫ много широки, но не трѣбва да се забравя тѣхното важно приложение въ Физиката и Механиката.

Но между трансцедентнитѣ функции, които се привързватъ къмъ алгебрическитѣ, забѣлѣжителни сѫ още интегралитѣ на функции съ *мюлтипликатори,* изучени съвсѣмъ частно отъ Апелъ. Това сѫ функциитѣ които, иматъ върху повърхнината на Римана само полюси или логаритмични особени точки.

Аналитичнитѣ функции сѫ оказали много голѣмо влияние и върху теорията на обикновенитѣ диференциални уравнения, върху която теория отъ 30 години насамъ има най-много писано. Аналитичната теория на тия диференциални уравнения ни довежда сѫщо до нѣкои специални функции. Върху диференциалнитѣ уравнения отъ кой да е редъ, на които общия интегралъ има постоянни критически точки, сѫ интересни работитѣ на Пенлеве, Фуксъ и Поанкаре.

Общата теория на функции съ по-вече комплексни промѣнливи напрѣдва много бавно. Въпроситѣ, които се полагатъ тукъ сѫ много мѫчни и то главно, защото не можемъ си прѣдстави тѣзи функции, което не е тъй съ функциитѣ на едно комплексно промѣнливо. Ето защо общитѣ теореми тукъ не сѫ толкова много, както бѣ при тия послѣднитѣ. Напр. за функции съ двѣ комплексни промѣнливи ние се намираме въ пространство съ 4 измѣрения, намѣсто двѣ уравнения ние имаме 4 уравнения съ частни производни, на които трѣбва да задоволяватъ двѣтѣ функции на четири промѣнливи.

Числото на специалнитѣ функции на по-вече промѣнливи е сѫщо трѫ ограничено. Такива сѫ напр. *хиперфуксиеновитѣ функции* и *хиперабеловитѣ*.

Въпросътъ за комплекснитѣ числа е сѫщо възбуждалъ интереса на математицитѣ прѣзъ послѣднитѣ години. Важни сѫ по тоя въпросъ мемоаритѣ на Вайрщрасъ и Дедекинъ.

Понятията за число, реално и комплексно, и функция, както се каза, сѫ основата на Анализа, но тукъ трѣбва да се прибави и това за *пространство*, което съставя прѣдметътъ даже на Геометрията. Тази послѣдната прѣзъ тоя вѣкъ е сѫщо била изложена на една проницателна критика и на изучаване основитѣ ѝ това е дало раждането на *Геометрията на Лобачевски*, върху която сѫ работили доста Риманъ, Клайнъ, Хилбертъ и др. математици.

Остава да кажемъ нѣколко думи и върху теорията на диференциалнитѣ уравнения, които играятъ важна роля въ Анализа. Първитѣ строги доказателства за сѫществуването на интегралъ на диференциалнитѣ уравнения бѣха на Коши. Въ теоремитѣ относно сѫществуването на интеграли се употрѣбяватъ различни методи, които зависятъ отъ това, дали уравненията и *даннитѣ* сѫ прѣдположени или не аналитически функции. Сѫществената мисъль на Коши се състои въ разглеждането на *мажорантнитѣ функции*, които даватъ възможность да се сравняватъ даденитѣ уравнения съ други, които лесно се интегрираръ. За едно частно диференциално уравнение съ какво да е число измѣнливи, Коши е означилъ сѫщественитѣ точки на доказателството, което София Кова-

левска въ единъ мемоаръ, който ще остане за винаги класически, е дала подъ една много проста форма. Приложението на частнитѣ диференциални уравнения е доста голѣмо въ Геометрията, Механиката и Физиката. Днесъ проблемитѣ отъ инфинитезималната Геометрия, третирани отъ Дарбу, сѫ станали причина за хубави аналитични издирвания. Неговитѣ уроци върху теорията за повърхнинитѣ ще бѫдатъ за винаги една класическа книга, а така сѫщо и мемоарътъ му отъ 1870 г. върху интегруването на частни диференциални уравнения отъ II-ри редъ. Отъ тази епоха разни математици сѫ развивали методи по-вече или по-малко общи. Г. Гурса е публикувалъ върху този прѣдметъ много важни резултати и много нови открития върху въпроси доста мѫчни. Новата теория на групитѣ на Софусъ Ли е сѫщо упражнила отъ 20 години насамъ голѣмо влияние върху изучването на частнитѣ диференциални уравнения.

За други по-важни въпроси отъ Анализа ще се обърнемъ пакъ къмъ физичнитѣ науки, отъ които Механиката е първата, и които науки въ всичкитѣ си части ни даватъ проблеми, въ които участвуватъ най-дълбокитѣ идеи на модерния Анализъ, а сѫщеврѣмено чистата математическа теория изгубва абстрактностьта си, когато вземе една физическа форма. Проблемитѣ на калорифичното равновѣсие водѣха къмъ уравнението, вече срѣщнато отъ Лапласа, при изучването на привличането. Има малко уравнения, които сѫ били прѣдметъ на толкова работи, както това прочуто уравнение. Теорията на привличането ни дава възможность да се поставятъ въ очевидность потенциалитѣ на простъ и двоенъ пластъ, разработени отъ Поанкаре. Теорията на динамическото електричество и тази на магнетизма сѫ били сѫщо началото на важни прогреси. Изучването на *линейнитѣ интеграли* и тѣзи на интегралитѣ надъ повърхнини сѫ взели отъ тази теория всичкото си развитие, и формулитѣ на Гринъ и Щокъ сѫ се явили за пръвъ пѫть въ физичнитѣ мемоари. Изобщо всичкитѣ теории, — даже и стари, на математическата Физика, които напослѣдъкъ се доста усъвършенствуваха, даватъ началото на много хубави проблеми и слѣдователно сѫ упражнявали и упражняватъ още едно щастливо влияние върху прогресите на чистия Анализъ.

Прѣди да свърша лекцията си ще се спра най-сетнѣ на уравненията, които сѫ изнамѣрени въ послѣднитѣ 12 години, наречени *интегрални уравнения* и *интегродиференциални*, които за сега интересуватъ най-много математицитѣ. Съ тѣзи уравнения, въ които непознатитѣ функции влизатъ подъ знака на интеграла, сѫ се занимавали още Лапласъ, Фурие и Абелъ. Послѣдниятъ за пръвъ

пжть рѣши едно такова уравнение, което бѣ срѣщнато въ единъ въпросъ отъ Механиката. Г. Волтера днесъ започна едно дълбоко изучване на една категория интегрални уравнения и даде за тѣхъ едно забѣлѣжително разширение. Уравнението на Волтера е еквивалентно съ рѣшението на единъ проблемъ на Коши за едно линеарно диференциално уравнение отъ *безкраенъ редъ*. Това е достатъчно да покаже ролята и естеството на този новъ аналитически инструментъ. Г. Фредолмъ рѣши сжщеврѣмено едно интегрално уравнение като това, което се срѣща въ рѣшаването проблема на Дирихле посрѣдствомъ потенциала на двоенъ пластъ. Това приложение е много прочуто и наскоро се видѣ, че много проблеми отъ Математич. Физика се довеждатъ до такива уравнения. Г. Волтера, напр., е показалъ, че уравненията на еластичностьта се довеждатъ до интегродиференциални уравнения и съ това се вижда още единъ пжть връзката между математич. Физика и чистия Анализъ.

Въ заключение, инфинитезималния Анализъ, измисленъ изпърво за нуждитѣ на Геометрията, е почналъ отпослѣ да се разпространява за физичнитѣ величини. Въ продължение на единъ вѣкъ забѣлѣжителни развития сж достигнати въ физичнитѣ науки. Но найвисоката точка на развитие изглежда да не е достигната, защото направенитѣ опити отъ физицитѣ и химицитѣ ще дадатъ изобилни материали, върху които висщия Анализъ ще може да се упражни съ единъ растящъ успѣхъ. Дългото усилие, което слѣдъ по-вече отъ два вѣка, достигна до сегашния Анализъ, показва човѣшкия умъ постоянно вѣренъ на себе си, напрѣдвайки всѣкога, безъ да отстжпва, като разпростира и обобщава неговитѣ методи, но никога не изгубва изъ прѣдъ видъ първоначалната идея, която ги е вдъхновила. Отъ всичко казано до тука се вижда до какво положение днесъ е дошелъ математ. Анализъ и какъ той, особно прѣзъ послѣднитѣ години, напрѣдва бързо и съ голѣми крачки. Отъ това може да се прѣдположи, че мжчнитѣ проблеми, които сега математицитѣ не могатъ рѣши, въ скоро врѣме ще бждатъ разрѣшени отъ тѣхнитѣ послѣдователи, а днешнитѣ разрѣшени мжчни проблеми, ще бждатъ играчка за послѣднитѣ.

Като свършвамъ лекцията си, обръщамъ се къмъ тѣзи отъ г. г. студентитѣ, които мислятъ да се занимаватъ съ сегашния модеренъ Анализъ или съ неговитѣ клонове, съ молба, прѣди да се отдадатъ на изслѣдвания върху специални въпроси, изпърво добрѣ да изучатъ основнитѣ елементи на Математическия Анализъ, защото само по такъвъ начинъ ще има успѣхъ въ тѣхната работа.