Година V. 1909 год. Книга IX—X.

# СПИСАНИЕ
НА
# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОТО ДРУЖЕСТВО
ВЪ СОФИЯ

Главенъ редакторъ: С. Ганевъ.

## Математиката, нейната дефиниция, мѣстото ѝ въ реда на наукитѣ и подраздѣленията ѝ [1].

I.

Въ тоя тържественъ за мене часъ намирамъ за неизлишно да заявя, че се считамъ щастливъ, дѣто ми се падна случая пръвъ да държа встѫпителна лекция по математика въ нашия университетъ. Не малко трудъ ми създаде изборътъ на темата, съ която трѣбва да ви занимая, като имахъ прѣдъ видъ разнообразието на слушателитѣ си. Не взехъ да развия специаленъ въпросъ, тъй като такъвъ не би могълъ да прѣдставлява общъ интересъ, а се обърнахъ къмъ философията на математиката и рѣшихъ да направя една бърза екскурзия изъ областьта ѝ, за да ви прѣдставя дефиницията на математиката, мѣстото ѝ въ реда на другитѣ науки и подраздѣленията ѝ.

Бързамъ, обаче, да прибавя, че тия, които сѫ прѣподавали и прѣподаватъ тоя прѣдметъ, и тия, които сѫ се занимавали и се занимаватъ съ изучването му, не ще чуятъ почти нищо ново отъ мене. Нъ се надѣвамъ, че по голѣмата часть отъ васъ, които по тоя прѣдметъ знаете само туй, що се прѣподава въ нашитѣ гимназии, ще се позамислите върху казаното отъ мене, а туй е и цѣльта ми.

### I. Дефиниция на математиката.

Първиятъ въпросъ, който си задаваме въ математиката, е изразяването на разнитѣ величини съ числа. Нъ туй изразяване на величинитѣ съ числа може да стане по три начина: чрѣзъ *броене*, когато величината е съставена отъ отдѣлни еднакви части, чрѣзъ непосрѣдствено *измѣрване*, когато величината е непрѣкѫсната, не е съставена

[1]) Встѫпителна лекция, четена въ Университета на 13 октомврий 1909 г., тукъ изложена съ нѣкои малки съкращения.

отъ отдѣлни еднакви части, а само можемъ да я мислимъ че е съставена отъ такива, и чрѣзъ *пресмятане*. Послѣднето се основава на съотношенията, що сѫществуватъ между разнитѣ групи величини, съ помощьта на които, като знаемъ численитѣ стойности на една група величини, можемъ да опрѣдѣлимъ численитѣ стойности и на други групи величини.

Броенето и измѣрването не сѫ математични дѣйствия, а първобитни; истинско математично дѣйствие е смѣтането. Само съ помощьта на смѣтането сѫ могли да бѫдатъ опрѣдѣлени не само разстоянията на звѣздитѣ до земята, но и тѣхнитѣ взаимни разстояния, тѣхнитѣ голѣмини, тѣхнитѣ истински форми, даже тѣхнитѣ относителни маси, срѣдни гѫстоти, главнитѣ обстоятелства при падането на тежки тѣла на повърхнината на всѣка отъ тѣхъ и т. н. Чрѣзъ силата на смѣтането всичкитѣ тия разни резултати и много още други, се основаватъ на непосрѣдственото измѣрване на малъкъ брой удобно избрани прави линии и на още пò-малъкъ брой ѫгли.

Когато между двѣ или повече величини сѫществуватъ съотношения, че можемъ да опрѣдѣлимъ едната, щомъ другитѣ сѫ извѣстни, тогава ролята на математиката се състои въ това, да даде на тия съотношения между величинитѣ математични изражения, сгодни за прѣобразуване и за по-нататъшни разсѫждения. За да може чистата математика да отговаря на всичкитѣ изисквания на природнитѣ науки, трѣбва да разглежда всевъзможнитѣ съотношения между $n$ величини и да извади общъ законъ за тия съотношения. Но подобни съотношения между величинитѣ не сѫ нищо друго освѣнъ функции. Слѣдователно, можемъ да кажемъ, че *математиката се занимава съ изслѣдването на функциитѣ*.

Тая дефиниция на математиката само по форма се различава отъ дадената отъ Auguste Comte[1] дефиниция на математиката — „посрѣдственото измѣрване на величинитѣ", или, „опрѣдѣляне величинитѣ една чрѣзъ друга съ помощьта на съотношенията, които сѫществуватъ между тѣхъ" — тъй като и послѣдната дефиниция прѣдполага функционална зависимость между величинитѣ, и напълно се съгласява съ дефиницията на H. Lorentz[2] — „наука за законитѣ на измѣненията на величинитѣ", или „наука за функциитѣ". Тъй дадената дефиниция на математиката напълно изчерпва съдържанието ѝ и е достатъчно обширна, та обхваща обикновенитѣ ѝ подраздѣления.

---

[1]) Cours de philosophie positive, I, стр. 98.

[2]) Элементы высшей математики, I, 2-ро изд., стр. 12 и 17.

## II. Мѣстото на математиката въ реда на наукитѣ.

За да можемъ да опрѣдѣлимъ мѣстото на математиката въ реда на наукитѣ, необходимо е да съставимъ, тъй да се каже, инвентаря на човѣшкитѣ знания, т. е. да класифицираме наукитѣ. Подобно нѣщо не е направено до сега въ една съвършена форма, па и надали би могло да се направи, тъй като отъ Ампера, комуто дължимъ първитѣ опитвания въ туй направление, науката постоянно прогресира.

Трѣбва да признаемъ, че колкото естествена и да ни се чини една класификация, непрѣменно тя съдържа въ себе си ако не нѣщо произволно, то поне нѣщо изкуствено, и слѣдов. е несъвършена. Нъ отъ това никакъ не слѣдва, че изобщо ний трѣбва да се откажемъ отъ една класификация на наукитѣ. Напротивъ, ний трѣбва да приемемъ една такава, като изхождаме отъ извѣстенъ принципъ, за да може да бжде тя по-рационална. За такъвъ принципъ Aug. Comte взема слѣдния: всѣка класификация трѣбва да изхожда отъ самото учение на класифицируемитѣ прѣдмети и да бжде опрѣдѣлена чрѣзъ дѣйствителното сродство и естественото нареждане на тия прѣдмети. А за тая цѣль трѣбва въ основата й да лежи послѣдователната зависимость на наукитѣ, като резултатъ отъ степеньта на абстракцията на съотвѣтнитѣ имъ явления.

Като излиза отъ горѣказания основенъ принципъ, въ главата „Иерархия на наукитѣ" Comte дѣли наукитѣ на двѣ голѣми групи: *конкретни* и *абстрактни*. Първитѣ изучаватъ прѣдметитѣ такива, каквито си сж въ дѣйствителность, напр. минералогията, историята и др.; вторитѣ — абстрактнитѣ науки — изслѣдватъ съотношенията между свойствата на изучвания прѣдметъ и условията на неговото сжществуване, независимо отъ това дали тия условия, па и самиятъ обектъ, сжществуватъ въ дѣйствителность, тъй като ний можемъ да създаваме тия обекти за изучване и да ги поставяме въ зависимость отъ едни или други условия съ цѣль да опрѣдѣлимъ законитѣ на тѣхната зависимость; такива сж, напр. химията, политичната економия и др.

Намирамъ умѣстно да приведа класификациитѣ, дадени отъ Auguste Comte и H. Laurent. Първата отъ тѣхъ е доста стара, отъ 1829 год., нъ се приема съ малки измѣнения отъ нѣкои автори, а втората е доста нова, за да бжде общеприета.

*Auguste Comte* подъ заглавие „Иерархия на наукитѣ" [1], раздѣля наукитѣ главно на двѣ части: неорганична физика и органична

---

[1] Cours de Philosophie positive.

физика. Споредъ това дали неорганичната физика разглежда общитѣ явления въ вселенната или пъкъ тия на земнитѣ тѣла, тя се подраздѣля на астрономия и земна физика. Послѣднята отъ своя страна се подраздѣля на двѣ твърдѣ различни части — собствена физика и химия — споредъ това дали тя разглежда тѣлата отъ механична или отъ химична гледна точка.

Органичната физика пъкъ отъ своя страна се дѣли на собственно физиология и социална физика; първата се отнася изобщо до живитѣ сѫщества, а втората — изключително до човѣка.

Като се основава на спомѣнатия по-горѣ принципъ за една класификация, Auguste Comte дава слѣдния редъ за споменатитѣ науки: астрономия, физика, химия, физиология и социална физика.

Споредъ него, тоя редъ е опрѣдѣленъ отъ необходимата и неизмѣнната субординация, основана на вдѫлбоченото сравнение на съотвѣтнитѣ явления, независимо отъ всѣко хипотетично мнѣние. Първата отъ тия науки разглежда най-общитѣ, най-проститѣ, най-абстрактнитѣ и най-отдалеченитѣ за човѣка явления; тѣ влияятъ върху всичкитѣ други, безъ да се влияятъ отъ послѣднитѣ. Наопаки, разгледванитѣ явления отъ послѣдната наука сѫ най-особенитѣ, най-сложнитѣ, най-конкретнитѣ и най-непосрѣдствено интереснитѣ за човѣка; повече или по-малко тѣ зависятъ отъ прѣдшествуещитѣ, безъ да указватъ нѣкакво влияние върху тѣхъ. Между двѣтѣ крайни, степеньта на специализирането, на усложнението и на персонализирането на явленията расте постепенно, като расте сѫщо така и тѣхната послѣдователна зависимость.

Прѣдъ всичкитѣ тия науки, обаче, Auguste Comte поставя математиката по причина на дѣйствително общия ѝ характеръ. За нея той се изразява така: „При сегашното състояние на развитието на нашитѣ положителни знания, мисля, че е удобно да се разглежда математиката не толкова като съставна часть на естествената философия, колкото, отъ врѣмето на Descartes'а и Newton'а, като истинска основа на цѣлата тая философия, при всичко че, по-точно казано, тя е едновrѣменно едното и другото. Наистина, днесъ математиката не е важна толкова съ знанията, които сѫ твърдѣ дѣйствителни и цѣнни, колкото като съставляеща най-могѫществения инструментъ, що човѣшкиятъ духъ може да употрѣби при изслѣдването законитѣ на естественитѣ явления".

Въ такъва смисъль сѫ прави и думитѣ на Immanuel Kant (1724—1804), който казва, че „въ всѣки клонъ на учението за природата ний имаме наука до толкова, доколкото въ нея има и математика".

*Lorentz*[1]) приема класификацията на Aug. Comte за основа и дава своя подобна, като приема 7 основни науки. Споредъ степеньта на абстракцията, той ги нарежда въ слѣдния редъ: абстрактни науки (математика), геометрия, механика, физика и химия, биология, астрономия, (въ по-общъ смисълъ отъ тоя, който обикновено ѝ придаваме, именно да съдържа физиологията и психологията) и социална физика.

*Laurent*[2]) мисли, че за да бжде една класификация колкото се може по-естествена, би трѣбвало прѣходътъ отъ единъ класъ въ други да бжде нечувствителенъ. Като отбѣлѣзва, че истинитѣ въ една наука сж толкова по-сигурни, колкото тѣ заематъ по-малко понятия чрѣзъ чувствата, че наблюдението играе толкова по-малка роля, колкото по-систематично е приложено разсжждението, той заключава, че е естествено да се класифициратъ наукитѣ споредъ броя и естеството на понятията, що тѣ заематъ чрѣзъ чувствата, като се постави на чело тая, която заема най-малко.

H. Laurent различава само петъ вида основни науки, които, на основание на посочения принципъ, нарежда по слѣдния начинъ: математични (абстрактни) науки, физични науки, естествени науки, економични или социални науки и телеологични науки.

На първо мѣсто той поставя математиката, като наука, която заема чрѣзъ чувствата най-малко нѣщо отъ природата. Тукъ спадатъ и аналитичната механика, която обема въ себе си небесната механика, астрономията или по-добрѣ, уранографията, като второстепенни науки.

На второ мѣсто идатъ физичнитѣ науки — физиката и химията — дѣто влиянието на чувствата се усилва въ сравнение съ това при математиката. Главниятъ характеръ на физичнитѣ науки е тоя, че тѣ се занимаватъ най-вече съ начина, по който материята дѣйствува върху материята, като тия дѣйствия се изясняватъ чрѣзъ явления, които нашитѣ чувства могатъ да констатиратъ направо или косвено. Физиката се различава отъ химията (при всичко че съ прогресирането на тия науки демаркационната имъ линия чезне) по това, че въ момента, когато тѣлата се измѣнятъ основно, физиката прѣстава, а започва химията. Тукъ спадатъ метеорологията, геологията, физичната астрономия и минералогията, като производни науки.

---

[1]) Элементы высшей математики, Томъ I, 2 изданіе, стр. 6.

[2]) Sur les vérités et les moyens de les découvrir (Essais d'une classification nouvelle des connaissances) [L'Enseignement mathém. XI (1909, № 4), стр. 203].

Слѣдъ физичнитѣ науки идатъ естественитѣ, — науки най-вече на наблюденията. Тѣ иматъ за прѣдметъ изучването на растенията, животнитѣ и човѣка, послѣдниятъ разгледанъ само като живо сѫщество, а не и като разумно.

На четвърто мѣсто дохождатъ социалнитѣ науки — статистиката и крематистиката — прѣдметъ на които е изучването дѣйствията на разумнитѣ сѫщества едно върху друго. Статистиката зарегистрирва социалнитѣ събития, а крематистиката използа тия данни, за да прѣдвижда социалнитѣ явления и да ги изяснява. Послѣдната обема финансовитѣ науки, банковитѣ операции, търговията.

Най послѣ, на пето мѣсто, Laurent поставя тъй нарѣченитѣ отъ него телеологични науки, които иматъ за прѣдметъ изучването на всичко онова, което не можемъ да възприемемъ направо съ нашитѣ чувства, но сѫществуването на което ний можемъ да подозираме, като душа, Богъ, човѣшката сѫдба, задгробнитѣ награди и наказания и др.

Въ посоченото разпрѣдѣление на наукитѣ не влизатъ историята и географията. Споредъ Laurent изобщо нѣма *история*, ако разглеждаме историята като описание на събитията на миналото: има толкова истории, колкото и науки. Историитѣ на математиката, на физичнитѣ науки, на естественитѣ науки ни запознаватъ съ употрѣбяванитѣ отъ нашитѣ прѣдшественици методи, като ни показватъ кои отъ тѣхъ сѫ били плодотворни; тѣ ни запознаватъ сѫщо и съ великитѣ хора, на които дължимъ откритията. Историята на землетресенията, учението за теренитѣ, палеонтологията ни запознава съ нашето произхождение. Економичната или обикновената история може да се разглежда отъ двѣ различни точки: тя може да се ограничи съ простото описание на важнитѣ събития, или пъкъ да се разглежда отъ по-висша точка, като една часть отъ економичнитѣ науки.

*Географията* се състои отъ двѣ части: физична география и политична география, отъ които първата е единъ анексъ на геологията, а втората влиза въ економичнитѣ и социални науки.

## III. Подраздѣления на математиката.

Отъ прѣдставената дефиниция на математиката е явно, че всѣки математиченъ въпросъ може да се разпадне на двѣ съвсѣмъ различни части: най-напрѣдъ трѣбва да опрѣдѣлимъ сѫществуещитѣ съотношения между разгледванитѣ величини, и слѣдъ това да намѣримъ неизвѣстното число, като знаемъ вече съотношенията му съ извѣстнитѣ числа. Отъ тукъ слѣдва основното дѣление математиката на *конкретна* и *абстрактна*, което почти се съгласява съ туй, що наричаме *приложна* математика и *чиста* математика [1]).

Явно е, че първата отъ тия двѣ части зависи отъ рода на разгледванитѣ явления и непрѣменно се измѣня съ разгледването на нови явления. Втората часть пъкъ съвършено е независима отъ естеството на разгледванитѣ прѣдмети и се отнася само до численитѣ съотношения, що тѣ прѣдставятъ. Едни и сжщи съотношения могатъ да сжществуватъ при много различни явления, които въпрѣки своята крайна различность, се разглеждатъ отъ математицитѣ като прѣдставляещи единъ и сжщи аналитиченъ въпросъ. Така напримѣръ, законътъ — една величина се измѣня право пропорционално съ квадрата на друга — който свързва изминатия пжть съ врѣмето при свободното падане на едно тѣло, изразява и съотношенията между лицето на кржга и неговия радиусъ, между повърхнината и диаметра на една сфера; измѣнението интензивностьта на свѣтлината и на топлината въ зависимость отъ разстоянието на свѣтещето или на топлинното тѣло, електропроводностьта на жицата въ зависимость отъ напрѣчния й разрѣзъ и т. н. И въ тоя случай абстрактната, общата часть на тия разни математични въпроси, като се разглежда само по случай на единия отъ тѣхъ, се разрѣшава и за другитѣ, тогасъ, когато конкретната часть непрѣменно трѣбва да бжде подета за всѣки въпросъ отдѣлно, безъ да може рѣшението на единия отъ тѣхъ да помогне при рѣшението на другитѣ.

Приложната математика, като има за цѣль съставянето на уравненията за явленията, à priori би трѣбвало да се състои отъ толкова разни науки, колкото сжществено различни категории естествени явления има. Ние не бихме могли да изброимъ всичкитѣ й подраздѣления, толкова повече, че всѣки день можемъ да бждемъ изненадани съ нова наука — приложна математика. Но въ сжщность при сегашното състояние на човѣшкия духъ, има само двѣ голѣми, общи категории явления, на които се знаятъ уравненията; това сж геометричнитѣ и механичнитѣ явления. Слѣдователно, чистата математика намира своето приложение главно въ *геометрията* и *рационалната механика*.

*Чистата математика* се раздѣля на три главни части: наука за смѣтането — анализъ, наука за пространство — геометрия и наука за движението — механика.

1. На първо мѣсто при подраздѣлението науката за смѣтането стои науката, която се занимава съ числата, дѣйствията съ тѣхъ и съ свой-

[1]) При изложението подраздѣленията на математиката ще бжда кратъкъ особно тамъ, дѣто се касае до нѣща, извѣстни на всички.

ствата имъ, именно, *аритметиката*. Тя се състои отъ двѣ сѫществени части: едната, която се занимава съ начинитѣ на смѣтането, необходими за въ живота поне въ най-елементарната си часть, или *обикновената аритметика*, и другата, която разглежда свойствата и съотношенията, присѫщи на числата, и която се нарича *научна аритметика (аритмология, теория на числата)*.

Къмъ обикновената аритметика, освѣнъ извѣстнитѣ елементарни дѣйствия, Aug. Comte причислява и дѣйствия, които сега срѣщаме въ други клонове на науката, като напримѣръ численото смѣтане съ редоветѣ, теорията на логаритмитѣ, изчисляването на тригономентричнитѣ таблици и даже численото рѣшаване на уравненията, които не можемъ да рѣшаваме алгебрично. Но тъй като споменатитѣ въпроси сѫ отъ по-висше естество, то могатъ да се въведатъ въ аритметиката само слѣдъ едно прѣдварително приготовление, слѣдъ учението за съотношенията и свойствата, което е работа на алгебрата.

Освѣнъ изучването разнитѣ свойства и съотношения, присѫщи на числата, C. A. Laisant [1]) причислява къмъ аритмологията: разглеждането нѣкои аритметични редове, главно аритметичната и геометричната прогресии, образуването степенитѣ на единъ двучленъ, аритметичния трижгълникъ на Паскаля, аритметичния квадратъ на Ферма, които обикновенно класифициратъ къмъ алгебрата. Тукъ спадатъ сѫщо така и голѣмъ брой въпроси отъ комбинаториката, а сѫщо така и фигурнитѣ числа.

За аритмологията *K. Hensel* [2]) се изразява така: „Работитѣ на Гауса, Дедекинда и Кронекера въ туй направление сѫ основитѣ на тая наука и спадатъ къмъ най-хубавото, що е могла да създаде математиката въ втората половина на миналия вѣкъ".

*Алгебрата* има за прѣдметъ рѣшаването на уравненията, или все едно, трансформирането на неявнитѣ функции въ явни. Съ своитѣ символи тя прѣдставя единъ видъ всемиренъ езикъ на дѣйствията съ величинитѣ, езикъ, който, споредъ думитѣ на Fourier, нѣма знаци, които да изразяватъ смжтни понятия.

Обикновено се казва, че разликата между аритметиката и алгебрата се състои въ това, че първата употрѣбява цифри, а втората букви. Това е едно погрѣшно схващане, защото и аритметиката си служи съ букви. Алгебрата има за цѣль да посочи дѣйствията, които ще трѣбва да се извършватъ, и за тая цѣль тя ни дава формули; нъ

---

[1]) C. A. Laisant, La mathématique, стр. 43.

[2]) Theorie der algebraischen Zahlen, I (прѣдговоръ).

еднажъ като се получатъ тия формули, остава работата на аритметиката да употрѣби цифри или букви, за да опрѣдѣли стойноститѣ. Aug. Comte, за да разграничи прѣдмета на едната и другата, казва, че алгебрата се занимава съ смѣтането на функциитѣ, когато аритметиката — съ смѣтането на стойноститѣ. При това трѣбва да забѣлѣжимъ още, че полето на аритметиката, по самото ѝ естество, е ограничено, когато това на алгебрата е неопрѣдѣлено, защото, като раздѣлимъ функциитѣ на прости и съставни, достатъчно е да знаемъ да изчисляваме първитѣ, за да можемъ да изчислимъ вторитѣ, когато не е тъй съ алгебричното поставяне на въпроса.

Алгебрата рѣшава твърдѣ лесно уравненията отъ първа и втора степень и ни дава малко сложни и трудни за приложение формули за уравненията отъ трета и четвърта степень, нъ тя е безсилна прѣдъ уравненията отъ по-горня степень. И ето защо доказателството на Abel'я[1]) за невъзможностьта на рѣшението на уравнения отъ по-горня отъ четвърта степень съ помощьта на обикновеннитѣ алгебрични функции се счита за важно откритие въ тая областъ.

Основатель на алгебрата въ тоя видъ, въ какъвто я схващаме днесь, е François Viète (1591 г.). До прѣди него сж означавали съ букви само неизвѣстнитѣ въ задачитѣ, а той е въвелъ тия означения и за самитѣ данни. Съ това изслѣдването на стойноститѣ се замѣстя съ изслѣдването на дѣйствията и се въвежда въ науката понятието математична функция, което е и начало на забѣлѣжителния ѝ прогресъ.

Развитието на алгебричния езикъ образува редъ глави, съвокупностьта на които, казва Laisant, при сегашното състояние на науката, е единъ истински паметникъ, който свидѣтелствува за могжществото на човѣшкия духъ и показва чудната помощь, що логичната конструкция на една щастливо комбинирана система отъ знаци и символи може да даде на разсжждението. Всѣка отъ тия глави образува *алгебрична теория*.

Алгебрата не изчерпва всички въпроси, относящи се до функциитѣ. Защото, когато поискаме да се вдълбочимъ още повече въ изучването на функциитѣ, когато искаме да прослѣдимъ хода имъ, особно ако тѣ сж малко по-сложни, ние срѣщаме почти ненадвиваеми мжчнотии. Тия трудности се срѣщатъ особно при въпроситѣ за тангентитѣ, максималнитѣ и минималнитѣ стойности, намирането истинскитѣ стойности на неопрѣдѣлени функции, скоростьта при движе-

[1]) Crelle's Journal, 1826. — Доказателството на Abel'я е било упростено самостойно отъ Evariste Galois (1811—1832).

нието и др. Тия и други подобни тѣмъ въпроси се рѣшаватъ най-лесно съ помощьта на *инфинитезималното смѣтане,* което се основава на границитѣ на отношението на безкрайно малки величини и на границитѣ на сумитѣ на безбройно много безкрайно малки величини.

Тукъ имаме двѣ обратни една на друга задачи: първо, да се намѣрятъ производнитѣ или дифиренциалитѣ на дадена функция, и, второ, да се намѣри първоначалната функция на дадена функция, разглеждана като производна или диференциалъ. Първата отъ тия задачи съставя прѣдмета на *диференциалното смѣтане,* а втората — на *интегралното смѣтане* — двѣтѣ главни части на инфинитезималното смѣтане.

Когато е дадена една функция съ уравнение, което изразява общия ходъ на измѣнението, то диференциалното смѣтане ни дава възможность, като разложимъ това измѣнение на безкрайно малки елементи, да опрѣдѣлимъ точно свойствата на явлението за всѣки отъ тия елементи. Изобщо съ помощьта на наблюдението и съ подходещи хипотези лесно установяваме съотношенията между безкрайно малкитѣ елементи на съизмѣняещитѣ се величини. Интегралното смѣтане пъкъ ни дава възможность, като сумираме тия мъгновени състояния, да създадемъ пълната картина, точния законъ на цѣлото явление.

Въпроситѣ отъ диференциалното смѣтане винаги могатъ да се рѣшаватъ, защото винаги може да се намѣри производната на всѣка функция. Намирането производнитѣ и на най-сложнитѣ функции се привежда къмъ това на производнитѣ на проститѣ функции, които могатъ да бѫдатъ опрѣдѣлени еднажъ за винаги и да съставятъ нѣщо подобно на таблицата за умножението въ аритметиката.

Не е тъй, обаче, при интегралното смѣтане. Тукъ най-често сме заставени да дѣйствуваме чрѣзъ налучкване. Отношението между тия двѣ части на анализа (диференциалното и интегралното смѣтане), казва Lagrange, е подобно на отношението на правитѣ дѣйствия — умножението и въздигането въ степень — и обратнитѣ имъ дѣйствия — дѣлението и извличането корени — въ аритметиката и алгебрата. Първитѣ дѣйствия сѫ възможени винаги съ познатитѣ правила и винаги даватъ точни резултати; обратнитѣ дѣйствия сѫ възможни само въ нѣкои случаи, а въ всичкитѣ други случаи даватъ само приблизителни резултати. Всѣки знае колко лесно се намира квадратътъ на едно число, и колко пъкъ изобщо е невъзможно да се намѣри квадратниятъ коренъ на всѣко число. Нъ тоя коренъ въ сѫщность сѫществува и даже въ нѣкои случаи ний можемъ да си го прѣдставимъ твърдѣ ясно. Например ако страната на единъ квадратъ вземемъ за единица, диагоналътъ му прѣдставя $\sqrt{2}$, чийто аритметично изражение не ни се удава. Сѫщо така и интегралитѣ сѫществуватъ въ дѣйствителность, нъ ний не можемъ да ги намѣримъ или да имъ изразимъ стойноститѣ.

Дѣйствително е за очудване, че съ такъва несъвършенъ инструментъ, като интегралното смѣтане, математицитѣ сполучватъ да прѣсмѣтнатъ, ако не точно, то поне съ достатъчно приближение, голѣмъ брой интеграли и да рѣшаватъ най-важнитѣ въпроси изъ математиката и физиката.

Инфинитезималното смѣтане ще съставя вѣчна слава на Newton'а, тъй като той пръвъ е открилъ сѫщностьта на това могѫществено орѫдие за изслѣдване, като е разгледалъ механични въпроси. Той е придавалъ механични тълкувания и на производната, като говори за скоростьта на измѣнението на функциитѣ. Специалното диференциално означение и указаниятъ способъ на тангентитѣ принадлежатъ на Leibnitz'а, но това още не значи, че именно него трѣбва да считаме създатель на диференциалното смѣтане. Споредъ Euler'а, на Leibnitz'а може да се припише ученото формулиране и нѣкакъ систематичното резюмиране.

Не е безинтересно да забѣлѣжа още, че въ историчното си развитие обратната задача е прѣдшествувала правата, т. е. интегралното смѣтане се е появило много прѣди диференциалното. И наистина, Архимедъ е смѣталъ съ интеграли при изчисляването лицето на параболата или обема на параболоида много вѣкове прѣди да се даде името имъ; диференциалното смѣтане пъкъ е нова наука: тя датира отъ XVII вѣкъ

Като изразимъ алгебрично съотношенията между безкрайно малкитѣ измѣнения на промѣнливитѣ величини и самитѣ тия величини, получаваме тъй нареченото *диференциално уравнение*. Слѣдов. всѣко диференциално уравнение съдържа една или повече непознати функции, измѣняемитѣ, отъ които тѣ зависять, и тѣхнитѣ производни или диференциали отъ различенъ редъ.

Всѣко диференциално уравнение дава аналитично изражение само на главнитѣ, основнитѣ условия на въпроса и обхваща не едно явление, а цѣла група по-вече или по-малко еднородни явления; съ това диференциалнитѣ уравнения ни даватъ възможность да откриваме общитѣ свойства на всички функции, които ги удовлетворяватъ. И тъй като задачитѣ изъ областьта на механиката, астрономията, физиката довеждатъ до съставянето на диференциални уравнения, то съ рѣшаването на тия уравнения, т. е. съ интегрирането имъ, ще можемъ да рѣшимъ напълно задачитѣ на приложната математика и да проникнемъ тайнитѣ на природата. И въ тоя случай Leibnitz е ималъ право да каже, че „числото освѣтлява дълбочинитѣ на вселената“. Но, за жалость, тая е най-трудната и най-малко напрѣдналата глава отъ инфинитезималното смѣтане.

Изопериметричнитѣ задачи, които се състоятъ въ опрѣдѣлянето такава форма на кривата, която при дадена дължина да затваря най-голѣмо или най малко плоско съдържание, сж довели Euler'a (1744 г.) до общи приеми за рѣшението на въпроси отъ тоя видъ. Lagrange (1762—1771) ги е развилъ въ новъ клонъ отъ инфинитезималното смѣтане подъ название *вариационно смѣтане*. Въ най-обширенъ смисълъ, задачата на вариационното смѣтане е въ опрѣдѣлянето вида на една неизвѣстна функция, щото извѣстенъ опрѣдѣленъ интегралъ, зависещъ отъ тая функция, да има максимална или минимална стойность въ означенитѣ граници. Въ диференциалното смѣтане се измѣня само численото значение на функциитѣ; въ вариационното смѣтане се прѣдполага много по-общъ процесъ — измѣнение и самия видъ на функционалната зависимость.

Не мога да се въздържа да не приключа въпроса за инфинитезималното смѣтане съ думитѣ на C. A. Laisant и A. Voss. Първиятъ казва[1]): „Откриването на инфинитезималното смѣтане е, може би, най-забѣлѣжителното дѣло, което нѣкога е извършено въ математиката. То бѣ истинска революция: отъ тоя моментъ приложенията слѣдватъ съ чудна бързина и чудна плодовитость; бѣха зачекнати най-труднитѣ задачи и понѣкога рѣшавани съ чудна леснина. Въ разположението на науката, новиятъ инструментъ бѣше единъ магиченъ ключъ, прѣдназначенъ да отвори всичкитѣ врати, да даде възможность да се проникне въ всичкитѣ тайни на природата“. Вториятъ пише[2]): „Никога една наука не е достигала по-голѣмъ триумфъ, колкото развитието на математиката въ ржцѣтѣ на героитѣ на инфинитезималното смѣтане Bernoulli, Euler, d'Alambert, Lagrange. Laplace; бѣше безподобно тържество, когато въ XVIII в. математичниятъ анализъ бѣше завладялъ всичкитѣ прѣдмети. Задачи, за рѣшението на които по рано не можеше и да се помисли даже, се повдигатъ, и не само че се повдигатъ, но се и рѣшаватъ, като игpaчка; вече нищо не се показва недостижимо за човѣшкия духъ въ областьта на точнитѣ естествени науки“.

И съ инфинитезималното смѣтане не се изчерпватъ всички въпроси относещи се до функциитѣ, защото, да се мисли другояче,

---

1) La mathématique, I изд., стр. 62.
2) Über das Wesen der Mathematik, 1908 г., стр. 21.

казва C. A. Laisant, значи да не се признае най-голѣмата и, може би, най-хубавата часть отъ математиката на XIX в., съ която сж свързали имената си най-прочутитѣ математици, като Legendre, Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Halphen, Mittag-Leffler, Fuchs, Hermite, Klein, Schwarz, Sophus Lie, Picard, Poincaré. И сега, може би, само въ това направление сж насочени най-важнитѣ съврѣменни математични работи, които съставятъ тъй нарѣчената *теория на функциитѣ*.

Прѣчкитѣ при интегрирането на алгебричнитѣ изражения сж прѣдизвикали разширяването понятието функция и върху имагинернитѣ величини. Новитѣ интеграли, които не сж могли да бждатъ опрѣдѣлени съ досегашнитѣ срѣдства, сж сжщо така трансцендентни функции. Нѣкои отъ тия трансцендентни функции сж се явили при опрѣдѣлянето дължината на джга отъ елипса и затуй сж нарѣчени *елиптични интеграли*. Къмъ тия интеграли, на брой три, сж били свѣдени всички интеграли на изражения, съдържащи квадратенъ коренъ отъ единъ многочленъ отъ трета или четвърта степень. Инверзнитѣ функции на елиптичнитѣ интеграли изявяватъ въ сжщность характернитѣ имъ свойства, и за туй било необходимо разглеждането имъ.

Jacobi е изтъкналъ главнитѣ свойства на новитѣ функции, а найвече тѣхната *двупериодичность*. Инверзнитѣ функции на елиптичнитѣ интеграли притежаватъ това свойство, което е основно и което никога не би могло да се изложи безъ имагинернитѣ величини. Тия функции се срѣщатъ на всѣка крачка при въпроситѣ отъ механиката и физиката.

Понятието функция се обобщава до крайность съ въвеждането на елиптичнитѣ функции. По-нататъшното изучване на функциитѣ е заставило математицитѣ да раздѣлятъ функциитѣ на фамилии, споредъ тѣхнитѣ *особености (singularités)*. Съ това име наричатъ изобщо всичкитѣ стойности, въ съсѣдството на които се произвежда нѣщо особенно. Тия особености се явяватъ при изслѣдването на съотвѣтнитѣ диференциални уравнения. Това именно разпрѣдѣление на функциитѣ като че ли е спомогнало въ голѣма степень за развитието теорията на функциитѣ.

2. Сжщественниятъ прѣдметъ на *геометрията* е пространството. Тя има за цѣль да изясни и да класира явленията, що прѣдставятъ прѣдметитѣ въ пространството, когато разглеждаме само тѣхнитѣ форми, относителни положения и голѣмини.

Прѣдметътъ на геометрията е отъ много по-конкретенъ характеръ въ сравнение съ тоя на анализа, и затуй геометрията трѣбва да бжде изобщо по-нагледна отъ анализа, трѣбва да образува единъ видъ естественъ прѣходъ отъ анализа къмъ механиката. Нъ отъ друга страна по-голѣмата конкретность на геометрията е и причина за по-малката достжпность на нейнитѣ аксиоми, поне за строгото и точното имъ формулиране.

*Обикновенната*, класичната геометрия, която се занимава съ точки, линии, равнини и тѣла, се дѣли, както е извѣстно, на планиметрия и стереометрия.

Откриването на аналитичната метода и на инфинитезималното смѣтане не е останало безъ влияние и върху геометрията. Прѣзъ XIX в. тя е била прѣдметъ на единъ видъ възраждане, въ което сж взели участие велики геометри, като Châsles, Poncelet и др., които сж създали тъй наречената *нова геометрия*. Основно понятие въ тая геометрия е *анхармоничното отношение*, което е било извѣстно и по-рано, нъ което никой не е уползотворилъ.

Другъ сжщественъ характеръ на новата геометрия е разглеждането не на точки, линии и повърхнини, а на *комплекситѣ* и *конгруенциитѣ*. Ако една права удовлетворява само едно условие, казваме че образува линеенъ комплексъ; ако ли удовлетворява двѣ условия — конгруенция; ако ли удовлетворява три условия — повърхнина. Напримѣръ, всичкитѣ прави, които прѣсичатъ една и сжща права, образуватъ единъ комплексъ; всичкитѣ прави, които прѣсичатъ двѣ дадени прави, образуватъ конгруенция; всичкитѣ прави, които прѣсичатъ двѣ дадени прави и сж успоредни съ една равнина, образуватъ повърхнина.

Забѣлѣжително мѣсто въ новата геометрия заема прѣобразуването на фигуритѣ. Съ помощьта на това прѣобразуване чрѣзъ точно опрѣдѣлени построения отъ фигурата F извеждаме друга F', и обратно, отъ F' намираме F. Когато е мжчно да се изведе извѣстно свойство на една фигура F, ний го търсимъ въ прѣобразуваната фигура F', дѣто то се проявява лесно. По-главни общи трансформации сж хомотетията, подобието, инверзията, хомологията, хомографията. Въ равниннитѣ фигури особно е забѣлѣжителна тая трансформация, въ която на една точка отговаря една права, на една права — точка, и отъ която Châsles е извелъ своя принципъ — дуалностьта. Тукъ сж зароднишитѣ и на теорията на реципрочнитѣ поляри, които Poncelet е развилъ.

Между многото различни трансформации отъ особенна важность е тая, при която отъ фигурата F извеждаме фигурата F', като съединимъ точкитѣ на първата фигура съ една постоянна точка и намѣримъ по опрѣдѣленъ законъ точкитѣ на фигурата F' по прокаранитѣ лжчи.

Перспективното изображение на една равнинна фигура върху друга равнина е частенъ случай отъ тая трансформация. Въ 1822 год. френскиятъ генералъ Poncelet като пленникъ на руситѣ въ Саратовъ, въ съчинението си „Traitée des propriétés projectives des figures“ е изяснилъ тия проективни свойства на фигуритѣ и съ това е положилъ основата на тоя клонъ отъ геометрията, който се нарича *проективна геометрия*. Reye и Cremona сѫ обобщили тия свойства и сѫ конституирали тая отдѣлна наука, която се развива всѣки день и дава блѣстящи резултати.

Въ много случаи е необходимо да се въведе въ геометрията и учението за прѣмѣстването на една фигура. Mannheim се счита основатель на тая глава отъ геометрията, която се нарича *кинематична геометрия*. Въ нея сѫ направени многобройни и интересни открития, важни както сами по себе си, а сѫщо така и за науката на движението — механиката.

Трижгълникътъ е изучванъ отъ най-древнитѣ врѣмена. Нъ когато въ 1873 г. Emile Lemoine напечата своя мемоаръ върху една забѣлѣжителна точка отъ равнината на трижгълника, която носи и неговото име — *точка на Lemoine'a* [1]) — много геометри, между които най-вече полковникъ Henri Brocard и Neuberg сѫ се посвѣтили върху изучването на тая фигура. Съ тоя си мемоаръ Lemoine създаде новъ голѣмъ дѣлъ отъ геометрията подъ името *геометрия на трижгълника*. Тя се развива днесъ усилено.

Сравняването разнитѣ конструкции, които могатъ да бждатъ извършвани съ кржжило и линеика, не е безъ интересъ и образува единъ отдѣлъ отъ геометрията, нарѣченъ *геометрография*. Основатель на геометрографията се счита E. Lemoine, който е забѣлѣзалъ, че всѣка конструкция, колкото сложна и да е тя, винаги може да се редуцира на нѣколко елементарни построения отъ сжщия видъ. По тоя начинъ той е можалъ да анализира всѣка геометрична конструкция и да я характеризира съ двѣ числа, нарѣчени отъ него *коефициентъ на упростяването* (coefficient de simplicité) и *коефициентъ на точностьта* (coefficient d'exactitude). Тя се прѣподава въ много страни.

*Геометрия съ n измѣрения.* Нуждата отъ обобщаване, която е свойствена на математичния умъ, е накарала нѣкои геометри да изле-

---

[1]) Линиитѣ, които сж симетрични съ медианитѣ на единъ трижгълникъ спрѣмо вжтрѣшнитѣ му бисектриси, се наричатъ *симедиани* (антимедиани, антипаралелни медиани). Тритѣ симедиани на единъ трижгълникъ се прѣсичатъ въ една точка — *точката на Лемуана*.

затъ вънъ отъ областьта на реалното пространство съ три измѣрения, въ което сме поставени, и да се запитатъ какви ли биха били свойствата на начертанитѣ фигури въ висшитѣ пространства, за които ний не можемъ да имаме никакво право или косвенно понятие. Геометриитѣ съ повече отъ три измѣрения сж само едно срѣдство да се даде геометриченъ образъ на алгебрични изражения. Нъ на основание на аналогиитѣ постепенно сж узнали, че може да се разсжждава върху тия прѣдположени геометрични създания и да се получатъ резултати, които да могатъ да се приложатъ въ абстракциитѣ, до които ни довежда реалния свѣтъ.

*Геометрия на положението (Analysis situs).* Въ тая геометрия се изучаватъ фигуритѣ или прѣдметитѣ, като се обръща внимание на тѣхнитѣ респективни положения. Многобройнитѣ и изобщо труднитѣ задачи, които се отнасятъ до игритѣ на шахъ, на домино, лабиринтитѣ, магичнитѣ фигури и т. н. се отнасятъ къмъ тая наука.

По заглавието си тя се отнася къмъ геометрията, по голѣма часть отъ прѣдметитѣ, които изучава, — къмъ алгебрата, а по-много отъ слѣдствията си — къмъ аритмологията. Тя принася важни услуги въ теорията на функциитѣ и въ геометричното приложение на инфинитезималното смѣтане.

*Аналитична геометрия.* Върху приложението на смѣтането въ геометрията се е обърнало внимание още въ най-раннитѣ врѣмена. Нъ Декартъ е далъ на тия приложения систематиченъ характеръ, като си е служилъ съ координати, и по тоя начинъ е показалъ, че всичкитѣ геометрични свойства могатъ да се прѣдставятъ съ числени съотношения. Нему се пада и славата да се счита основатель на тая геометрия.

Тя обема освѣнъ това, ще се прѣподава въ гимназиитѣ, още и всичкитѣ приложения на смѣтането, а най-главно приложението на инфинитезималното смѣтане въ геометрията. Повторно ще забѣлѣжа и тукъ, че именно изслѣдването тангентитѣ на кривитѣ линии е създало инфинитезималното смѣтане.

3. *Рационална механика.* Механиката е наука за движението. Вмѣсто отъ аксиоми, тя тръгва отъ основни принципи. Тия принципи, които никога не сж очевидни отъ само себе си, сж истини, които слѣдватъ както отъ разумното разглеждане на явленията отъ външния свѣтъ, така сжщо и отъ дълъгъ редъ логични дѣйствия. Слѣдователно, принципитѣ на механиката сж резултатъ отъ дълбокъ синтезъ, на който сж способни само нѣкои изключителни гении.

Изложени и формулирани, тия принципи ставатъ математични прѣдложения; наистина, по самия имъ видъ се вижда, че прѣдварителната и неизбѣжната абстракция е вече извършена. И тогава рационалната механика притежава необходимитѣ елементи за конституирането на цѣлата математична наука. Наричаме я *рационална механика,* защото тя се занимава само съ абстракции, защото прѣходътъ отъ конкретното къмъ абстрактното е вече извършенъ и защото послѣтнешното възвръщане отъ абстрактното къмъ конкретното е въ областьта на приложната механика.

Механиката се подраздѣля на три части:

*Кинематика.* Кинематиката е наука за пространството въ свръзка съ врѣмето, нъ безъ да се занимава съ причинитѣ на движението. Тя съдържа учението за движенията на точки и изобщо на геометрични фигури.

Кинематиката не се основава на никой отъ принципитѣ на механиката; тя е чисто математична наука въ пълната смисъль на думата. Поставена между геометрията и рационалната механика, кинематиката е едно допълнение на първата и едно подготовление за втората.

*Статика.* Тя има за цѣль да изучи необходимитѣ условия, щото едно тѣло, което е въ покой, да се не влияе отъ причинитѣ, които, взети отдѣлно, биха го довели въ движение. Статиката е експериментална наука, като кинематиката, геометрията, върху които се опира, но тя е експериментална само въ своитѣ начала, и, като геометрията, тя се построява рационално. — Статиката и кинематиката служатъ за въведение въ динамиката или общата механика.

*Динамика.* Динамиката е учението за движението подъ дѣйствието на причинитѣ, които го създаватъ. Тя има чисто експериментален характеръ, основава се върху нѣколко хипотези, провѣрени чрѣзъ опита, и дава възможность да се откриятъ принципитѣ на статиката, което е едно частично провѣряване на нейнитѣ принципи.

Динамиката или общата механика владѣе надъ физичнитѣ науки и се стрѣми да ги погълне.

И тая класификация, като всѣка класификация, както казахъ и по-рано, съдържа нѣщо изкуствено, и слѣдов. е несъвършена и прѣдставя пробели. Една по-обширна класификация би била по-точна, но затуй пъкъ би изгубила отъ своята ясность, прѣгледность, и пакъ не би била абсолютно точна. Въ сжщность всичкитѣ науки се прѣплитатъ, си помагатъ взаимно, сж солидарни помежду си, и всѣко откритие въ областьта на едната, влияе за напрѣдъка и на другитѣ. Трѣбва да забѣлѣжимъ, че при такова едно дѣление и нареждание на човѣшкитѣ знания на категории има помежду имъ не ясни демаркационни линии, а гранични зони, върху които повече различни науки могатъ да прѣдявяватъ равни права.

Г. Стояновъ.