Година IX. Септемврий и Октомврий 1914 г. Кн. I—II.

СПИСАНИЕ
на
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОТО ДРУЖЕСТВО
ВЪ СОФИЯ

Редакторъ: Ст. Н. Лафчиевъ.

Еволюция на понятието число.

Встжпителна лекция, четена на 11.X. 1914 год. отъ

Л. Чакаловъ.

Уводъ.

Съврѣменниятъ математически анализъ е построенъ върху двѣ основни понятия: това сж понятията за число и функция. Първото отъ тѣзи понятия, въ своята най-примитивна форма, е съставяло основата на математическата наука още отъ най-старитѣ врѣмена. Слѣдователно, би трѣбвало да се очаква, че въ математиката, която се слави като най-точна измежду точнитѣ науки, върху произхода и постепенното развитие на това понятие царува пълна логическа ясность. Но трѣбва да признаемъ, колкото и да изглежда това на пръвъ погледъ парадоксално, че сериозни опити за уясняване на принципитѣ, върху които почива математическиятъ анализъ и специално аритметиката или науката за числата, бидоха прѣдприети едва отъ едно столѣтие.

Това се обяснява отъ една страна съ обстоятелството, че до прѣди сто години математицитѣ не чувствуваха изобщо нужда отъ едно строго логическо обосноваване принципитѣ на математиката. Тѣхното внимание, тъй да се каже, бѣше всецѣло погълнато отъ новитѣ методи на изслѣдване, които ги довеждаха до все по-нови и по-интересни изводи.. А вѣрностьта на тѣзи изводи бѣше за тѣхъ достатъчна гаранция, че и основитѣ на зданието, което тѣ изграждаха, сж здрави и непоколебими. Отъ друга страна, главниятъ източникъ за откриване на математическитѣ истини е билъ и си остава пространствената интуиция. И математицитѣ дълго врѣме сж имали безгранично довѣрие въ нея, като сж смѣтали за безпогрѣшно всичко, което почива върху нашето прѣдставление за пространство, движение и врѣме. По тоя начинъ тѣ не сж чувствували, напр., никаква нужда да дефиниратъ точно, що наричаме непрѣкжсната функция. Тѣ сж смѣтали понятието непрѣкжснатость за вродено на човѣка, което не е имало никакъвъ смисъль да се дефинира.

Критическиятъ периодъ на математиката, който настжпи въ началото на миналото столѣтие, засѣгна сжщо и основитѣ на аритметиката. Благодарение на усилията на редъ великани на математическата мисъль, като Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor и др., сега можемъ да кажемъ вече, че тази математическа дисциплина почива на солидна логическа основа.

Тукъ ще се постараемъ да направимъ единъ паралелъ между старитѣ и модернитѣ възгледи върху понятието число, до колкото това е възможно въ рамкитѣ на една лекция.

Аритметиката у старитѣ гърци.

Старитѣ гърци подъ „число“ сж разбирали само това, което ние днесъ наричаме цѣло положително число. Изглежда, че по това врѣме аритметиката не се е развивала въ тѣсна връзка съ геометрията, методитѣ на която бѣха достигнали до висока степень на съвършенство. По тази причина аритметиката остана сравнително назадъ. Въ всѣки случай, и въ областьта на аритметиката тѣ сж направили доста голѣмъ прогресъ. Така, напримѣръ, на Евклидъ се приписватъ доказателствата на основнитѣ свойства на цѣлитѣ числа, основани на тъй наречения Евклидовъ алгоритъмъ на послѣдователно дѣлене.

Но характерното за Евклида и неговитѣ съврѣменници е, както споменахме, че тѣ не сж се стремили да използуватъ и приложатъ въ аритметиката това, което сж постигнали въ областьта на геометрията. Така, напр., Евклидъ въ своитѣ „Елементи“ доказва, че сжществуватъ несъизмѣрими отсѣчки, т. е., такива отсѣчки, които нѣматъ обща мѣрка. Такива сж, напр., страната и диагональтъ на единъ квадратъ. Но той се задоволява само да констатира, че аритметиката е безсилна да изрази отношението между двѣ несъизмѣрими величини, вмѣсто да разшири по подходящъ начинъ понятието число.

По-късно, прѣзъ периода на упадъка на старата гръцка култура, нѣкои автори сж смѣтали вече съ квадратни корени, както съ обикновени числа; само че това смѣтане сѫ извършвали механически и при това само съ приближение. Отъ Евклида до XV. столѣтие аритметиката не е направила сѫщественъ прогресъ въ това отношение.

Метрическитѣ възгледи на Descartes'а и неговитѣ послѣдователи.

Първиятъ сериозенъ опитъ, да се разшири понятието число, датира отъ Декартъ. Основавайки се на Евклидовото учение за пропорциитѣ, той установи една връзка между измѣримитѣ или екстензивнитѣ величини и аритметическитѣ символи. Чрѣзъ своята аналитична геометрия той вложи, тъй да се каже, геометрически смисъль въ алгебрическитѣ формули, които до тогава прѣдставяха често символи, лишени отъ каквото и да било конкретно съдържание. Щастливото съчетание на алгебрата или буквеното смѣтане на François Viète и новата аналитична геометрия прѣдставяше извънредно удобна почва за образуване на съврѣмената прѣдстава за число. По този начинъ науката за числата стана зависима отъ учението за измѣримитѣ величини и главно геометрията. Учението на Descartes'а въ неговата най-чиста форма достигна до тамъ, да идентифицира напълно понятията „число“ и „величина“.

Метрическитѣ възгледи на Descartes'а останаха господствуващи до срѣдата на миналото столѣтие, па и днесъ тѣ доминиратъ при математическото обучение въ срѣднитѣ училища. Споредъ тѣзи възгледи, числата се разглеждатъ като произхождащи отъ измѣрването на дължинитѣ на сегменти, разположени върху една права, върху която е фиксирана една постоянна начална точка и една положителна посока. Всѣка точка върху тази права може да се разглежда като крайна точка на единъ векторъ, началото на който се намира въ началната точка на числата. Единъ такъвъ векторъ съ положителна посока се избира за единица и на него отговаря числото едно. Всѣки другъ векторъ се измѣрва чрѣзъ едно число, равно на отношението на дадения векторъ къмъ вектора единица. Това число се взема съ знакъ + или — споредъ това, дали посоката на прѣдставения отъ него векторъ е положителна или отрицателна. Въ случай, че дадениятъ векторъ е съизмѣримъ съ вектора единица, прѣдставеното отъ него число е рационално. Въ противенъ случай то е ирационално и може да се прѣдстави, напр., като безкрайна десетична или верижна дробь.

Критика на метрическия възгледъ.

При едно по-внимателно анализиране на този възгледъ, не е мжчно да се видятъ неговитѣ слаби страни. Прѣди всичко, тукъ чисто аритметическото понятие „число“ се дефинира чрѣзъ понятия, съвсѣмъ чужди на аритметиката, като векторъ, дължина и посока. Освѣнъ това, не е достатъчно само понятието число да се разшири по такъвъ начинъ, че да се създаде новъ ансамбълъ числа, часть отъ който да бжде ансабмълътъ на цѣлитѣ числа. Трѣбва да се оправдае това разширение, като се покаже, че правилата, които сж въ сила за дѣйствията съ цѣлитѣ числа, оставатъ въ сила и за всички числа отъ новия ансамбълъ. А тъкмо това тукъ не е възможно. Наистина, на всѣки векторъ отговаря опрѣдѣлено число. Но нищо не ни дава право да заключимъ обратно, че на всѣки символъ, полученъ чрѣзъ прилагане на аритметич. дѣйствия върху дадени числа, отговаря непрѣмѣнно единъ векторъ.

Тѣзи недостатъци на метрическия възгледъ за понятието число се чувствуваха особно прѣзъ критическия периодъ на развитието на математическитѣ науки, именно, когато математицитѣ се стремѣха да поставятъ на по-солидна почва новитѣ инфинитезимални методи на анализа. Нѣкои основни теореми отъ учението за границитѣ не можаха да бждатъ доказани по единъ задоволителенъ начинъ. Такъвъ е, напр., принципътъ на Cauchy за сходимость на безкрайнитѣ редици, който ни дава възможность да установимъ поне теоретически, дали дадена редица е сходяща или разходяща, безъ да ни е извѣстна нейната граница, ако такава сжществува. Строго доказателство на този принципъ не е далъ нито Cauchy, нито слѣдъ него Bolzano, Hankel и други, които сж се опитвали да го докажатъ, придържайки се о старитѣ възгледи за понятието число. Геометрическиятъ елементъ въ тѣзи възгледи е прѣдставлявалъ удобна почва за р а з б и р а н е на много свойства на числата, но не и за тѣхното логическо и з в е ж д а н е.

Всичко това стана причина да се прѣдприеме къмъ срѣдата на миналото столѣтие една коренна ревизия на основнитѣ аритметически понятия. На първо мѣсто трѣбваше аритметиката да се освободи отъ всички чужди на нея понятия, като величина, векторъ и пр. Съ други думи, съзнавайки ползата отъ разширението на понятието число, математицитѣ виждаха вече, че за да могатъ доказателствата въ аритметиката да иматъ истинска сила на доказателства, трѣбва това обобщение да се извърши по чисто логически пжть, безъ намѣсата на елементи, чужди на аритметиката. Тази не лека задача си бѣха поставилли Dedekind, Cantor, Weierstrass и множина тѣхни съврѣменници. И сега вече можемъ да кажемъ, че тѣхнитѣ усилия се увѣнчаха съ успѣхъ.

Принципътъ на перманенцията.

Отъ чисто аритметическо гледище, постепенното разширение на понятието число се дължи на нашия напълно естественъ стремежъ да разширимъ ансамбъла на числата тъй, че обратнитѣ дѣйствия изваждане, дѣление и коренуване да могатъ да се извършватъ неограничено. Тази тенденция, именно, е формулирана за прьвь пжть отъ Hankel като принципъ на перманенцията. Извѣстно е, напримѣръ, че въ елементарната алгебра понятието отрицателно число се въвежда, като се изхожда отъ този принципъ. Създаватъ се, именно, отрицателнитѣ числа съ цѣль да се направи възможно дѣйствието изваждане въ всѣки случай. По-нататъкъ, сжщиятъ принципъ служи като ржководно начало при опрѣдѣлянето на дѣйствията съ отрицателнитѣ числа. Тѣзи дѣйствия се дефиниратъ по такъвъ начинъ, че законитѣ на смѣтането, които сж въ сила за дѣйствията съ положителни числа, да оставатъ въ сила и за отрицателнитѣ. Така напр., правилото, че произведението на двѣ отрицателни числа е положително число, не е доказуемо. Но това още не значи, че то е на посоки установено. Напротивъ, при неговото установяване ние се ржководимъ отъ принципа на перманенцията: ние дефинираме произведението на двѣ отрицателни числа по такъвъ начинъ, че правилата за дѣйствията съ положителни числа да оставатъ въ сила и за отрицателнитѣ.

Сравняване точкитѣ на правата съ ансамбъла на рационалнитѣ числа.

Както и трѣбваше да се очаква, съ най-голѣма мжчнотия бѣха придружени опититѣ да се изгради и теорията на ирационалнитѣ числа върху чисто аритметическа почва. Нѣкои математици до срѣдата на миналото столѣтие смѣтаха дори за съвършено невъзможно да се отдѣли понятието за ирационално число отъ това за измѣрима величина. Извѣстно е, че най-напрѣдъ разглеждането на геометрическитѣ величини е довело Евклидъ и съврѣменницитѣ му до убѣждението, че дължинитѣ на всички отсѣчки не могатъ да бждатъ изразени чрѣзъ рационални числа. Наистина, при дадена единица дължина, на всѣко рационално число отговаря една отсѣчка съ напълно опрѣдѣлена дължина, която може лесно да се построи.

Но обратно, на всѣка отсѣчка не отговаря едно рационално число. Или, по-просто изразено, правата линия е по-богата съ точки, отколкото ансамбълътъ на рационалнитѣ числа съ числени индивиди. Това различие между ансамбъла на рационалнитѣ числа и ансамбъла на точкитѣ върху една неограничена права е основната причина за разширение ансамбъла на рационалнитѣ числа по такъвъ начинъ, че и на всѣка точка на правата линия да отговаря винаги опрѣдѣлено число. Но прѣди да се пристжпи къмъ подобно разширение на понятието число, трѣбва да се изслѣдва коренната причина за това различие между ансамбъла на рационалнитѣ числа и точкитѣ на една права. Привърженицитѣ на метричния възгледъ обясняваха това различие съ непрѣкжснатостьта на правата линия. Пространството, а заедно съ това и пространственитѣ форми, казваха тѣ, не можемъ да си ги мислимъ другояче, освѣнъ като непрѣкжснати. Дали това е наистина тъй — това е въпросъ на философията. Важното е, че тѣ приказваха за непрѣкжснатость, безъ да дефиниратъ, що разбиратъ подъ тази дума. И тукъ тѣ оставаха вѣрни на себе си, като свеждаха, така да се каже, въ послѣдна инстанция всичко къмъ пространствената интуиция.

Тукъ му е мѣстото да забѣлѣжимъ, че и при модернитѣ възгледи за разширение понятието число пространствената интуиция играе важна роль; тя ни упжтва въ коя посока трѣбва да стане това разширение, за да бжде полезно и цѣлесъобразно. И въ този случай, както и при всѣки актъ на математическо творчество, принципътъ на цѣлесъобразностьта и икономията играе първенствуваща роль. Но докато по-прѣди пространствената интуиция замѣстваше често дефинициитѣ и логическитѣ доказателства, споредъ модернитѣ възгледи тя трѣбва да служи като надежденъ упжтвачъ, който твърдѣ често ни посочва цѣльта, къмъ която трѣбва да се стремимъ. Но само логиката е, която ни дава срѣдства за постигане тази цѣль.

И така, първиятъ сжщественъ въпросъ, който трѣбваше да се разрѣши при едно строго логично обосноваване на теорията на ирационалнитѣ числа, бѣше слѣдниятъ: да се открие и формулира аритметически онова свойство на ансамбъла на рационалнитѣ числа, което го отличава отъ ансамбъла на точкитѣ върху една права.

Dedekind'овата теория на ирационалнитѣ числа.

Този въпросъ, именно, разрѣши по единъ напълно задоволителенъ начинъ Richard Dedekind въ брошурата Stetigkeit und irrationale Zahlen, публикувана въ 1872 год. Dedekind забѣлѣзва прѣди всичко, че ако върху една неограничена права си изберемъ една точка А, то всички останали точки на правата се раздѣлятъ на двѣ категории; къмъ първата категория принадлежатъ всички точки, разположени влѣво отъ точката А, а къмъ втората — всички точки, разположени вдѣсно отъ А. Най-сетнѣ, самата точка А можемъ да я причислимъ къмъ първата или втората категория и въ такъвъ случай първата категория ще притежава една най-дѣсна, или пъкъ втората категория ще има една най-лѣва точка. Най-характерното свойство на точкитѣ отъ тѣзи двѣ категории е, че произволна точка отъ първата категория лежи влѣво отъ всѣка точка на втората категория. Сжщото нѣщо забѣлѣзваме и въ ансамбъла на рационалнитѣ числа. Всѣко рационално число раздѣля ансамбъла на рационалнитѣ числа на двѣ класи: горня и долня, притежаващи свойството, че произволно число отъ долнята класа е по-малко отъ кое да е число на горнята класа. До тукъ аналогията между ансамбъла на рационалнитѣ числа и точкитѣ на една права е пълна. Да разгледаме сега обратния въпросъ. Нека си мислимъ всички точки на една права, раздѣлени по нѣкакъвъ начинъ на двѣ категории тъй, че произволна точка отъ първата категория да лежи влѣво отъ коя да е точка на втората категория. Ние не можемъ да си прѣдставимъ подобно раздѣляне на точкитѣ на една права въ двѣ категории, безъ да приемемъ като нѣщо очевидно, че сжществува една прѣдѣлна точка между тѣзи двѣ категории. Това свойство на правата Dedekind нарича непрѣкжснатость. То не може да бжде доказано, а трѣбва да се разглежда като постулатъ или аксиома.

Да прѣнесемъ сжщото разглеждане въ областьта на рационалнитѣ числа. Нека си мислимъ едно сѣчение въ областьта на рационалнитѣ числа, т. е., да раздѣлимъ ансамбъла на рационалнитѣ числа по такъвъ начинъ въ двѣ класи, че произволно число отъ долнята класа да бжде по-малко отъ кое да е число на горнята класа, Сжществува ли въ такъвъ случай непрѣмѣнно едно прѣдѣлно рационално число между тѣзи двѣ класи? Лесно е да се докаже чрѣзъ най-елементарни аритметически срѣдства, че не винаги сжществува такова число. Ето това свойство на ансамбъла на рационалнитѣ числа характеризира, спорѣдъ Dedekind, разликата между този ансамбълъ и точкитѣ на една права. За да попълнимъ тази празднина въ ансамбъла на рационалнитѣ числа, трѣбва да разширимъ този ансамбълъ, като дефинираме нови числа. Току що направениятъ паралелъ ни дава възможность да извършимъ това разширение по чисто аритметически начинъ. Когато при едно сѣчение въ областьта на рационалнитѣ числа не сжществува прѣдѣлно рационално число между двѣтѣ класи, ние дефинираме просто чрѣзъ това сѣчение едно ново число, което наричаме ирационално. Значи ирационално число не е нищо друго, освѣнъ такова сѣчение въ областьта на рационалнитѣ числа, при което не сжществува прѣдѣлно рационално число между двѣтѣ класи. Това ирационално число смѣтаме по дефиниция по-голѣмо отъ всѣко число на долнята класа и по-малко отъ всѣко число на горнята класа на сѣчението.

Тукъ нѣма да се спираме на въпроса, какъ се дефиниратъ аритметич. дѣйствия съ ирационалнитѣ числа. Ще забѣлѣжимъ само, че правилата за смѣтане, които важатъ за дѣйствията съ рационални числа, оставатъ въ сила и за ирационалнитѣ. Това, разбира се, не е само по себе си очевидно, а се доказва.

Сѣчение въ областьта на реалнитѣ числа.

Нека се спремъ тукъ на другъ единъ въпросъ отъ принципиална важность. Видѣхме, че ирационалнитѣ числа се въвеждатъ, за да се попълни една празднина въ областьта на рационалнитѣ числа. По този начинъ ние дохождаме до ансамбъла на р е а л н и т ѣ   ч и с л а, който обгръща всички рационални и ирационални числа. Но дали този новъ ансамбълъ на р е а л н и т ѣ числа не притежава сжщия недостатъкъ, както ансамбълътъ на рационалнитѣ числа? Съ други думи, ако раздѣлимъ всички реални числа на двѣ класи по такъвъ начинъ, че всѣко число отъ долнята класа да бжде по-малко отъ кое да е число на горнята, то сигурни ли сме, че сжществува едно прѣдѣлно *реално* число между двѣтѣ класи? На този въпросъ може да се отговори утвърдително; тъй че, ансамбълътъ на реалнитѣ числа притежава сжщото свойство, което приписваме на точкитѣ на една права споредъ Cantor-Dedekind'овата аксиома. Възъ основа на това свойство ансамбълътъ на реалнитѣ числа се нарича непрѣкжснатъ. Разбира се, че тукъ въ думата „непрѣкжснатъ" се влага едно напълно опрѣдѣлено съдържание. И въпросъ е, дали математическата непрѣкжснатость се покрива напълно съ това, което ние въ обикновения животъ сме навикнали да наричаме непрѣкжснатость.

Ch. Méray, Cantor и Weierstrass дефиниратъ независимо отъ Dedekind ирационалнитѣ числа чрѣзъ безкрайни рационални редици. Но може да се докаже, че тѣхнитѣ дефиниции сж еквивалентни съ тази на Dedekind.

Въвеждане на комплекснитѣ числа въ анализа.

Независимо отъ строго научното обосноваване на съврѣменната теория на реалнитѣ числа, което, както изтъкнахме, отъ гледна точка на логиката е независимо отъ нашитѣ пространствени прѣдстави, все пакъ постепенното разширение на понятието число става, така да се каже, въ съгласие съ нашата пространствена интуиция. При това, изглежда на пръвъ погледъ, че въвеждането на ирационалнитѣ числа е послѣдниятъ етапъ отъ разширението на понятието число, защото ансамбълътъ на реалнитѣ числа е достатъченъ, за да можемъ съ тѣхъ да изразяваме измѣримитѣ величини.

Развитието на математическия анализъ отъ XVI-то столѣтие насамъ, обаче, наложи едно ново разширение на понятието число чрѣзъ въвеждането въ алгебрата на тъй нареченитѣ имагинерни символи. Италиянскитѣ математици отъ XVI вѣкъ се натъкнаха найнапрѣдъ въпрѣки волята си на тѣзи имагинерни символи при рѣшаването на алгебричнитѣ уравнения отъ 3-а и 4-а степень съ произволни коефициенти. Тѣ успѣха да намѣрятъ съ помощьта на формалнитѣ правила на буквеното смѣтане такива алгебрически изрази, които да удовлеторвяватъ едно уравнение отъ 3-а или 4-а степень. Оказа се, обаче, че при нѣкои числени значения на коефициентитѣ тѣзи формули не бѣха годни за рѣшаване на уравненията, защото безогледното имъ прилагане изискваше извличане на квадратни корени отъ отрицателни числа, което не е възможно въ областьта на реалнитѣ числа. Така напримѣръ, прилагането на Кардановата формула за рѣшаването на едно кубично уравнение е невъзможно, ако дискриминантата е отрицателна. А тъкмо въ този случай уравнението има три реални корени. Наистина, нѣкои италиянски математици оперираха съ „имагинернитѣ символи“ по правилата, които сж въ сила за реалнитѣ радикали, и по този начинъ рѣшаваха чрѣзъ Кардановата формула кубичнитѣ уравнения дори и въ случая, познатъ като casus irreducibilis. Но това безогледно прилагане на принципа на перманенцията не означаваше още никакъвъ принципиаленъ напрѣдъкъ. Тѣ продължаваха да отричатъ реалностьта на имагинернитѣ символи; и ако въпрѣки това смѣтаха съ тѣхъ, то бѣше само затова, защото резултатитѣ, които получаваха по този начинъ бѣха вѣрни, а по другъ начинъ не можаха да бждатъ установени.

Прѣзъ XVII и XVIII столѣтия тѣзи възгледи не прѣтърпѣха почти никакви измѣнения. Но прѣзъ това врѣме въ математицитѣ се затвърди постепенно убѣждението, че не само въ алгебрата, но и въ цѣлия математически анализъ, въвеждането на имагинернитѣ числа е полезно и дори неизбѣжно. Въ анализа имагинернитѣ числа си пробиха пжть, благодарение работитѣ на Euler и Bernoulli'евцитѣ. Особено голѣма сензация въ математическия свѣтъ произведе откриването на аналитичната връзка между експоненциялната и тригонометричнитѣ функции. Това бѣше голѣма изненада за съврѣменницитѣ на Euler'а, комуто дължимъ това откритие. Никой не прѣдполагаше до тогава, че може да сжществува такава тѣсна зависимость между експоненциялната функция, която се дефинира по чисто аритметически начинъ, и тригонометричнитѣ функции, които дължатъ своя произходъ на геометрията. Поради това, математицитѣ тогава гледаха на имагинернитѣ числа като на мистериозни символи, въвеждането на които въ математиката се оправдава съ интереснитѣ резултати, които се добиваха чрѣзъ тѣхъ. Но въпрѣки очевидната полза отъ имагинернитѣ символи, тѣ не ги смѣтаха за числа, както личи и отъ самото имъ название имагинерни, т. е. въображаеми, несжществуващи въ дѣйствителность числа. До тогава обобщението на понятието число се смѣташе за легитимно само когато то става въ тѣсна връзка съ нашитѣ пространствени прѣдстави. А имагинернитѣ числа се появиха на аритметична почва, въ разрѣзъ съ тогавашното понятие за екстензивнитѣ величини.

Геометрическо тълкуване на комплекснитѣ числа.

Едва къмъ края на XVIII столѣтие В. Argand направи първия успѣшенъ опитъ за геометрическо изясняване на комплекснитѣ числа посрѣдствомъ точкитѣ на една равнина. Сжщиятъ начинъ употрѣбяваше по-кжсно и Gauss, независимо отъ Argand. При това фактътъ, че Gauss не наричаше тѣзи числа имагинерни или невъзможни, а пръвъ въведе термина „комплексни числа", показва, че той не се е придържалъ о старитѣ възгледи за невъзможностьта на тѣзи числа. Чрѣзъ геометрическото прѣдставяне на комплекснитѣ числа, което днесъ е вече общеприето, Argand и Gauss успѣха да сведатъ аритметическитѣ дѣйствия съ комплекснитѣ числа къмъ геометрически дѣйствия съ вектори въ равнината. Така тѣ вложиха геометрически смисъль въ непонятнитѣ до тогава имагинерни символи по сжщия начинъ, както метрическиятъ възгледъ изясняваше по геометрически начинъ отрицателнитѣ числа. Отъ този моментъ математицитѣ почнаха да смѣтатъ въвеждането на комплекснитѣ числа въ математическия анализъ и дѣйствията съ тѣхъ за напълно легитимни.

Съврѣменната теория на комплекснитѣ числа.

Отъ съврѣменно гледище този геометрически начинъ на въвеждане комплекснитѣ числа въ анализа не може да се оправдае напълно, тъй като този послѣдниятъ трѣбва да бѫде изграденъ на чисто аритметическа почва. Съврѣменното гледище за въвеждането на комплекснитѣ числа е гледището на Hamilton'a, който разглежда всѣко комплексно число като комплексъ или съвокупность отъ двѣ реални числа въ извѣстенъ порядъкъ. По дефиниция той смѣта такова едно число за реално, когато втората му съставна часть или координата е равна на нула. При дефиницията на дѣйствията съ комплекснитѣ числа като рѫководно начало ни служи принципътъ на перманенцията. По този начинъ дѣйствията събиране и изваждане се дефиниратъ съвсѣмъ естествено. Обаче, това, което бие на пръвъ погледъ въ очи, е своеобразниятъ, бихъ казалъ, произволниятъ начинъ, по който се дефинира произведението на такива двѣ числа. Разбира се, че отъ гледна точка на логиката това не може да се смѣта за нѣкакъвъ недостатъкъ на Hamilton'овата теория на комплекснитѣ числа. Достатъчно е отъ логична гледна точка, щото дѣйствията да бѫдатъ дефинирани тъй, че да нѣма вѫтрѣшно противорѣчие между дефиницiитѣ. Инакъ тѣ могатъ да бѫдатъ съвършено произволни. Но нашето любопитство не може да бѫде задоволено съ такъвъ формаленъ отговоръ. Естествено е да си зададемъ въпроса: защо именно въвеждането на обикновенитѣ комплексни числа принася такива неоцѣними услуги на анализа? Или пъкъ, не може ли да се разшири понятието число чрѣзъ въвеждането на комплексни числа отъ по-висшъ порядъкъ, което да даде другъ помощенъ тласъкъ на развитието на математическитѣ науки? Единъ категориченъ отговоръ на тѣзи въпроси до сега математическата наука още не е дала. Пръвъ опитъ за въвеждане въ математиката на нови комплексни числа е направилъ Hamilton съ тъй нареченитѣ кватерниони. Това сѫ комплексни числа съ 4 единици, за които сѫ въ сила всички аритметически закони, съ изключение на комутативния законъ на дѣйствието умножение. Въпрѣки това аритметическо неудобство на кватернионитѣ, геометрическото имъ прѣдставяне посрѣдствомъ вектори въ пространството е отъ голѣма полза за механиката и математическата физика.

Хиперкомплексни числа.

Слѣдъ Hamilton мнозина математици сѫ правили опити за създаване на такива комплексни числа съ по-вече единици, за които да бждатъ въ сила всички закони на обикновената аритметика. Но всички тѣзи опити сж останали безуспѣшни. Тѣзи изслѣдвания изтъкнаха важната роля, която играе слѣдното свойство на реалнитѣ или пъкъ обикновенитѣ комплексни числа: произведението на двѣ числа е нула тогава и само тогава, когато поне единъ отъ множителитѣ е нула. K. Weierstrass доказа въ 1863 год., че единственитѣ комплексни числа, които притежаватъ това послѣдно свойство и сжщевремѣнно се подчиняватъ на асоциативния, комутативния и дистрибутивния закони на дѣйствията събиране и умножение, сж обикновенитѣ комплексни числа. Слѣдователно, не е възможно въвеждането на нови комплексни числа, безъ да се жертвува нѣкое отъ правилата за смѣтане на обикновената аритметика. По тази причина едва ли би имало голѣма полза отъ въвеждането на нови комплексни числа въ анализа.

За реалностьта на тъй нареченитѣ „имагинерни числа".

Отъ казаното до тукъ се вижда, че споредъ съврѣменнитѣ възгледи, комплекснитѣ числа сж не по-малко реални, отколкото тъй нареченитѣ реални числа. Отъ дурга страна, ползата отъ комплекснитѣ числа въ анализа е тъй голѣма, че никой не може да я оспори. Блѣскаво доказателство за това е модерната теория на аналитичнитѣ функции, основана отъ Cauchy. Редъ свойства на една функция, които оставатъ необясними, или най-малко случайни, когато се ограничимъ съ реални значения на промѣнливитѣ, се обясняватъ отъ теорията на функциитѣ по единъ напълно естественъ начинъ, като прѣминемъ въ комплексна областъ. Дори въ послѣдно врѣме нѣкои чисто геометрически проблеми, които сж ни завѣщани още отъ най-дълбока дрѣвность, бидоха разрѣшени отъ една страна благодарение на аритметическото поставяне на тѣзи проблеми и отъ друга — на мощнитѣ срѣдства, съ които се обогати математическиятъ анализъ чрѣзъ въвеждането на комплекснитѣ числа. Такава е, напр., прочутата задача за квадратурата на кржга. Никой не би отрекълъ нейната реалность. Но тази задача биде разрѣшена отъ проф. Lindemann въ отрицателна смисъль благодарение на новитѣ срѣдства, които ни даде теорията на функциитѣ. И характерното въ случая е, че рѣшението на тази задача по геометрически пжть, при днешното състояние на геометрията, е немислимо. Това показва, безъ съмнѣние, прѣдимството на теорията на комплекснитѣ функции надъ геометрическитѣ методи, дори когато се отнася за откриване на чисто геометрически истини.

Нека приведемъ тукъ още единъ примѣръ, отъ който се вижда ползата отъ изучаването на функциитѣ въ копмлексна область за установяването на интересни аритметически свойства, които притежава ансамбълътъ на цѣлитѣ числа. Още старитѣ гърци сж обърнали внимание на неправилното разпрѣдѣление на първоначалнитѣ числа. При едно по-внимателно разглеждане на редицата първоначални числа, обаче, лесно може да се забѣлѣжатъ редъ интересни свойства, които изглеждатъ толкозъ по-вѣроятни, колкото по-голѣми и по-пълни сж таблицитѣ на първоначалнитѣ числа, съ които си служимъ. Така, ние по чисто импириченъ начинъ откриваме извѣстна закономѣрность въ разпрѣдѣлението на първоначалнитѣ числа. Тъй напримѣръ, чрѣзъ внимателно разглеждане на такива таблици може да се дойде лесно до заключение, че всѣка аритметическа прогресия, на която първиятъ членъ и разликата сж взаимно първоначални цѣли числа, съдържа безбройно много първоначални числа. Но не е тъй лесно да се докаже строго това. И до сега това прѣдложение не може да бжде доказано чрѣзъ методитѣ на елементарната теория на числата, освѣнъ въ най-преститѣ случаи. Но съ помощьта на методитѣ, които ни дава анализътъ на комплекснитѣ числа, Lejeune Dirichlet успѣ да докаже строго вѣрностьта на това прѣдположение.

По-кжсно, изслѣдването свойствата на тъй наречената Riemann'ова ζ- функция за комплексни значения на аргумента, доведе до извънредно интересни аритметически изводи относително законитѣ за разпрѣдѣлението на първоначалнитѣ числа. И въ този случай бие въ очи интимната връзка между тѣзи закони и свойствата на Riemann'овата ζ- функция за к о м п л е к с н и значения на аргумента. Цѣлата аналитична теория на числата е богата съ подобни примѣри, дѣто извеждането на нѣкои свойства на ансамбъла на първоначалнитѣ числа е възможно само когато разширимъ нашия кржгозоръ чрѣзъ прѣминаване въ областьта на комплекснитѣ числа.

За мнозина може би е непонятно, защо прѣминаването въ областьта на комплекснитѣ числа е отъ такова важно значение за доказването на геометрически или аритметически истини, които изразяватъ въ края на краищата съотношения между реални величини. На този въпросъ проф. Voss отговаря чрѣзъ една аналогия. Извѣстно е, че сжществуватъ геометрически прѣдложения, които не могатъ да бждатъ доказани въ равнината, но които извънредно леко се извеждатъ, щомъ прѣминемъ въ пространство съ три измѣрения. Такова е, напр., извѣстното прѣдложение на Desargues, споредъ което, ако съотвѣтнитѣ страни на два триъгълника, разположени въ една и сѫща равнина, се прѣсичатъ въ три точки, лежещи на една права, то правитѣ, съединяващи съотвѣтнитѣ върхове на тѣзи триъгълници се прѣсичатъ въ една точка. Това прѣдложение се доказва много лесно съ помощьта на проективната геометрия на пространството. Но ако се органичимъ само съ постулатитѣ на проективната геометрия на равнината, то не може да бѫде доказано, както забѣлѣзва Hilbert въ своитѣ „Grundlagen der Geometrie".

Сѫщо тъй ансамбълътъ на комплекснитѣ числа, като ансамбълъ съ 2 измѣрения, е много по-богатъ съ числени индивиди, отколкото линеарниятъ ансамбълъ на реалнитѣ числа. Затова и посрѣдствомъ въвеждането на комплекснитѣ числа ние успѣваме да си обяснимъ въ много случаи такива съотношения, които сигурно бихме изпуснали изъ видъ, ако се ограничехме само съ областьта на реалнитѣ числа.

Възможно ли е ново разширение на понятието число?

Отъ всичко казано до тукъ имаме ли право да заключимъ, че едно ново разширение на понятието число е невъзможно, или пъкъ безполезно? Да отговоримъ утвърдително на този въпросъ въ неговата най-голѣма общность, би значило да изпаднемъ въ сѫщата грѣшка, въ която сѫ изпаднали неведнъжъ математицитѣ до сега. Непрѣкѫснатото развитие на математиката е налагало сѫщеврѣменно и едно разширение на основитѣ, върху които почива тя. Това развитие не е спрѣло и до днесъ. Послѣднитѣ нѣколко десетилѣтия се ознаменуваха съ завоюването на нови области отъ математическия анализъ, които отъ своя страна ще създадатъ почва, може би, за едно ново разширение на понятието число. Въ каква посока може да стане това разширение и какво влияние ще окаже то върху развоя на математическитѣ науки — за това е още твърдѣ рано да се сѫди. Въ всѣки случай, досегашнитѣ успѣхи на математиката трѣбва да усилятъ у насъ вѣрата въ способностьта на човѣшкия умъ да надвие всички трудности, които му се изпрѣчватъ.