Емануилъ Ивановъ като педагогъ и ученъ

отъ Л. Чакаловъ.

Научната и просвѣтна дейность на професоръ Емануилъ Ивановъ съвпада съ онзи градивенъ периодъ въ нашето учебно дѣло, който настѫпи веднага следъ освобождението. Характерното за този периодъ е липсата на подготвенъ преподавателски персоналъ за новооткрититѣ срѣдни училища. Особено осезателно се чувствуваше тази липса за специалисти учители по математика, физика, химия, езицитѣ и т. н.; и държавата, въ лицето на тогавашното Просвѣтно Министерство, правѣше голѣми усилия за да привлече за преподаватели въ гимназиитѣ всички разполагаеми сили всрѣдъ тогавашната българска интелигенция, както и такива отъ чужбина. Главно съ огледъ на сѫщата нужда въ 1888 год. се положиха и основитѣ на едновремешното Висше Училище отначало съ единъ, а наскоро следъ това, съ два факултета: историко-филологически и физико-математически. Тъкмо по това време младиятъ и енергиченъ Ем. Ивановъ, току-що завършилъ висшето си образование въ Германия, заемаше длъжностьта главенъ инспекторъ въ Министерството на Народното Просвѣщение и нему и на неговитѣ сътрудници бѣ възложена тогава тежката и отговорна задача за подбиране на професорски персоналъ за физикоматематическия факултетъ, както и за създаване условия за научна работа въ новооснованитѣ научни институти.

Единъ отъ важнитѣ въпроси, отъ разрешението на който зависеше и бждащата сждба на Висшето Училище, бѣше, какъвъ характеръ и каква насока трѣбва да се даде на преподаванията и упражненията въ това училище. Въ Министерството на Просвѣщението тогава преобладаваше мнението, преподаванията да иматъ научно-педагогиченъ характеръ, като се даватъ на студентитѣ предимно такива познания, които сж имъ необходими, за да могатъ да се посвѣтятъ на бждащето си учителско поприще. На това мнение се противопоставиха Ем. Ивановъ и неговитѣ колеги. Тѣ смѣтаха, че новооснованото Висше училище трѣбва да се развие постепенно въ единъ университетъ по образеца на западноевропейскитѣ такива, който да има за задача преди всичко култивирането на науката. Това не значи, че тѣ игнорираха крещящитѣ нужди на обучението въ нашитѣ срѣдни училища; напротивъ, тѣ смѣтаха, че въ интереса на това обучение е, щото студентитѣ да получатъ по-солидни научни знания, които да съставятъ основата на тѣхната бждаща педагогическа дейность. Защото инакъ Висшето Училище би се обърнало въ единъ висшъ педагогически курсъ за подготовка на гимназиални учители съ ограниченъ кржгозоръ. Сега правотата на това гледище е очевидна за всички, но по онова време дори и нѣкои мѣродавни лица, съ признати заслуги за учебното ни дѣло, имаха доста смжтна представа за задачитѣ на единъ просвѣтенъ институтъ, какъвто е билъ Висшето Училище.

Спомнямъ си много добре това, което ми каза веднажъ чествуваниятъ покойникъ относно избора на първитѣ професори. Като висшъ чиновникъ въ Министерството проф. Ивановъ представилъ за одобрение на тогавашния министъръ на нар. просвѣщение списъка на лицата, които трѣбвало да се поканятъ за преподаватели по математика и физика въ физико-математическия факултетъ. Въ този списъкъ фигурирали имената на нѣколко чужденци, между които билъ и чехскиятъ ученъ Mathias Lerch, известенъ по-после съ своитѣ трудове по анализъ и теория на числата. Като разпитвалъ за личнитѣ качества и особености на кандидатитѣ, министерътъ узналъ случайно, че Lerch накуцвалъ съ едина кракъ. И този физически недостатъкъ craналъ причина да бѫде зачеркнатъ въпросниятъ ученъ отъ списъка на поканенитѣ „за да не кажели хората, че за професори въ Висшето училище сѫ повикали куцо и слѣпо отъ чужбина!"

За насъ сега е трудно да си съставимъ понятие за мѫчнотиитѣ, съ които е била придружена организационната работа презъ първитѣ години отъ сѫществуването на Висшето училище. Нуждни сѫ били не само обширни познания, но сѫщо тъй и организаторски дарби, тактъ и умение, за да се преодолѣятъ тѣзи мѫчнотии.

Въ първитѣ години на своята академическа кариера проф. Ем. Ивановъ е трѣбвало да чете лекции едва ли не по всички математически дисциплини, а освенъ това и опитна физика. При това, на него е била възложена нѣколко години подъ редъ, като ректоръ и деканъ на физико-математическия факултетъ, административна работа по управлението на Висшето Училище, която той е извършвалъ самичъкъ, подпомаганъ само отъ единъ секретарь и единъ писаръ. Работата е отивала до тамъ, че той е трѣбвало по нѣкога самъ да изплаща заплатитѣ на университетския персоналъ! Нуждни сѫ били, наистина, неизчерпаема енергия и дълбока преданность къмъ дѣлото, за да може едно и сѫщо лице да изпълнява толкозъ много и разнообразни функции!

Въпрѣки тѣзи странични занятия, проф. Ивановъ изпълняваше най-добросъвестно преподавателската си работа. Когато четеше лекциитѣ си, той свещенодействуваше и неусѣтно това негово съсрѣдоточаване въ работата завладѣваше и цѣлатя аудитория.

По умствения си складъ той принадлежеше къмъ онази категория хора, които сѫ склонни повече къмъ абстрактно мислене, отколкото къмъ въплътяване на идеитѣ въ осезаеми образи. Тази негова особеность се отразяваше и върху преподаванията му. Въ тѣхъ той най-много държеше на строго логичната последователность въ изложението. Призоваваше, наистина, на помощь и нагледната представа, но не като срѣдство за доказзане, а само за по-дълбоко вникване въ сѫщината на математическитѣ истини.

Сжщата характерна особеность проличава и въ неговитѣ научни трудове. Съ особна любовь той се впускаше въ изследвания изъ вълшебното царство на числата, и до днесъ още пълно съ неразгадани тайни. — По отношение на теорията на числата, която безсмъртниятъ Gauss нарече царица на математиката, математицитѣ се раздѣлятъ резко на две категории. Къмъ първата категория принадлежатъ интуитивнитѣ изследвачи, които не могатъ никога да се фамилияризиратъ съ абстрактнитѣ аритметични методи, понеже имъ липсватъ нагледни образи, въ които да ги въплътятъ. Къмъ втората категория пъкъ се числятъ ентусиазиранитѣ привърженици на аритметиката, стремежътъ на които е да сведатъ всички математически истини въ последна инстанция къмъ аритметически такива; които искатъ, съ други думи, да „аритметизиратъ“ математиката, както се изразяваше покойниятъ Klein. Къмъ тази последна категория принадлежеше и покойниятъ нашъ учитель Ем. Ивановъ. Добилъ своето образование въ Германия по онова време, когато идеитѣ на така наречената Берлинска школа вече тържествуваха, той проявяваше винаги живъ интересъ къмъ основнитѣ въпроси въ математиката, които се намиратъ на границата между наука и философия. Сжщия този интересъ той будѣше и всрѣдъ четцитѣ на нашето списание съ своитѣ философско-педагогични статии, публикувани въ първитѣ годишнини. Знаейки отъ лично наблюдение, че математическото обучение въ нашитѣ срѣдни училища е останало много назадъ въ методично отношение главно поради това, че учителитѣ сж оставени сами на себе си, безъ постоянни ржководители, безъ добри учебници, той имъ се притече на помощь съ редица статии, въ които изложи разнитѣ възгледи за основнитѣ аритметични понятия: цѣло число, единица, броене, дробни, отрицателни, ирационални числа и пр. Въ тѣзи статии се изясняватъ основнитѣ въпроси едновременно отъ научно и отъ методично гледище: като се запознава учительтъ съ научнитѣ опредѣления на въпроснитѣ понятия, даватъ му се сжщевременно и упжтвания за начина, по който тѣ трѣбва да се излагатъ на ученицитѣ, за да могатъ да бждатъ правилно усвоени; освенъ това, посочватъ се и нѣкои неправилности въ обучението, завещани отъ рутината. Може смѣло да се твърди, че подобренията въ нашата учебна програма и учебна литература по математика се дължатъ до голѣма степень на въздействието, упражнено на съответно мѣсто отъ рецензиитѣ и статиитѣ на проф. Ивановъ.

Чисто научнитѣ трудове на проф. Ем. Ивановъ сѫ публикувани въ Годишника на Софийския Университетъ и въ страницитѣ на нашето списание. Мѣстото не ми позволява да се впускамъ въ подробенъ анализъ на тѣзи научни трудове, затова тукъ ще се огранича само съ кратки бележки за тѣхното съдържание.

1. Тетраниони. II Годишникъ на Софийския Университетъ (1905), стр. 145—154.

Това е първата математическа статия въ Годишника на нашия Университетъ. Въ нея проф. Ем. Ивановъ съобщава резултатитѣ отъ своитѣ издирвания върху една специална система отъ хиперкомплексни числа съ четири единици, които числа той нарича тетраниони. Тѣзи числа могатъ да се получатъ отъ обикновенитѣ комплексни числа по сѫщия пѫть на обобщение, по който се получаватъ тѣзи последнитѣ отъ реалнитѣ числа; съ други думи, единъ тетранионъ представя съвъкупность отъ две обикновени комплексни числа, взети въ опредѣленъ редъ и свързани помежду си съ една нова „имагинерна" единица, която се подчинява на сѫщитѣ формални правила за смѣтане, както и обикновената имагинерна единица i. По дефиниция, обаче, тетранионната имагинерна единица се различава отъ i, тъй че въ областьта на тетранионитѣ символътъ $\sqrt{-1}$ има четири стойности. Лесно е да се провѣри, че въ казаната хиперкомплексна область оставатъ въ сила почти всички правила за смѣтане, които се прилагатъ въ обикновената аритметика и които се изразяватъ чрезъ равенствата

$$A+B=B+A,\ A+(B+C)=(A+B)+C,\ A+0=A;$$
$$AB=BA,\ A(BC)=(AB)C,\ A(B+C)=AB+AC,\ A.0=0,\ A.1=1$$

Въ това отношение тетранионитѣ сѫ по-прости и по-удобни отъ кватернионитѣ на Hamilton, за които, както е известно, не е въ сила така нареченията комутативенъ законъ на действието умножение, изразенъ чрезъ равенството $AB=BA$. Въ замѣна на това пъкъ има случаи, дето действието дѣление на два тетраниона не може да се извърши, макаръ и дѣлительтъ да е отличенъ отъ нула; сѫщо тъй може да се случи, произведението на два отлични отъ нула тетраниона да е равно на нула. Тетраниони, които притежаватъ това последно свойство, се наричатъ дѣлители на нулата. При действията умножение и дѣление тѣ играятъ до голѣма степень сѫщата роля, както нулата въ областьта на обикновенитѣ комплексни числа. Така напримѣръ, ако дветѣ части на едно равенство съдържатъ като множитель единъ и сжщъ дѣлитель на нулата, то като съкратимъ на него, можемъ да получимъ погрѣшенъ резултатъ.

Следъ като дава на единъ какъвъ да е тетранионъ тригонометрична форма, авторътъ разграничава една категория тетраниони, които той нарича **вектори**, защото между тѣхъ и пространственитѣ вектори съ обща начална точка O сжществува взаимно еднозначно съотношение, тъй че на всѣки тетранионъ отъ поменатата категория отговаря единъ такъвъ векторъ и обратно. Лесно се провѣрява, че произведението и частното на два векторни тетраниона е пакъ векторъ, който може да се построи лесно. Но докато при кватернионитѣ векторитѣ се възпроизвеждатъ сжщо и чрезъ прилагане на действията събиране и изваждане, при тетранионитѣ не е тъй; тази именно особеность на тетранионитѣ намалява шанса за тѣхното успѣшно прилагане въ учението за пространственитѣ екстензивни величини.

За интереса, който възбудиха у насъ тѣзи изследвания, свидетелствува фактътъ, че въ нашата бедна математическа литература се появиха следъ това четири студии въ връзка съ тетранионитѣ на проф. Ивановъ, авторитѣ на които сж все негови ученици.

2. **Върху диференцирането на функциийнитѣ редове.** II Годишникъ на Соф. У-тетъ (1905), стр. 155—157.

Въ тази статия е обобщена и за аналитичнитѣ функции методата, която прилага френскиятъ математикъ J. Richard въ кн. 5, год. XV (1905) на Revue de Mathématiques Spéciales, за да докаже теоремата за почленно диференциране на единъ функционенъ редъ.

3. **Върху нѣкои свойства на квадратнитѣ остатъци.** Списание на Ф.-Мат. Д-во, год. II, стр. 265—273 и 313—323.

Главната цель, която си поставя проф. Ем. Ивановъ съ тази статия, е да заинтересува четцитѣ на нашето списание съ нѣкои въпроси изъ областьта на висшата аритметика и то предимно отъ теорията на квадратнитѣ остатъци. Въ първата ѝ часть сж изведени основнитѣ предложения отъ теорията на конгруенциитѣ (сравненията), теоремата на Fermat, когато модулътъ е просто или съставно число, теоремата на Wilson, а сжщо тъй е доказанъ и критериятъ на Euler за познаване, кога едно число е квадратенъ остатъкъ или неостатъкъ. Втората часть е посветена на по-специални изследвания; въ нея сѫ изведени нѣкои свойства на квадратнитѣ остатъци, които не се срѣщатъ въ никое отъ по-важнитѣ съчинения по теорията на числата. Изложението е образцово и не предполага никакви предварителни познания отъ тази область, поради което е достѫпно дори и за начеващи студенти. Баагодарение на тия ценни качества, то е напълно пригодно за да подтикне любознателнитѣ четци на списанието и къмъ по-нататъшни занимания съ аритметични въпроси.

4. Едно свойство на първоначалнитѣ числа. Списание на Ф.-Мат. Д-во, год. IV (1908), стр. 24—27.

Думата е за нѣкои аритметични свойства на биномнитѣ коефициенти, които свойства могатъ да се формулиратъ накратко така: Ако раздѣлимъ биномнитѣ коефициенти

$$\binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \ldots \binom{n-1}{m}, \ldots \binom{n-1}{n-1}$$

на цѣлото положително число n и означимъ съответно съ r_1, r_2,... r_{n-1} абсолютно най-малкитѣ остатъци отъ това дѣление, то

1) $r_m = (-1)^{m-1}$, когато n е нечетно просто число;

2) сѫществуватъ значения на m, при които r_m е по-абсолютна стойность по-голѣмо отъ 1, когато n е съставно;

3) $r_{m+1} = -r_m$, когато $m+1$ е взаимно просто съ n.

Споредъ 1) и 2) свойството 1) е характерно за проститѣ числа; то може, следователно, да ни послужи като критерий за познаване, дали едно цѣло число n е просто или не. Разбира се, за голѣми значения на n този критерий представя сѫщитѣ неудобства, както и известниятъ критерий, който се основава на Wilson'овата теорема.

5. Върху положителнитѣ решения на неопредѣленитѣ уравнения отъ първа степень съ две неизвестни. Спис. на Ф.-Мат. Д-во, год. VI (1910) стр. 32—34.

Това е сбито изложение на единъ рефератъ, четенъ въ заседанието на нашето дружество на 21 февруарий 1910 год. (в. отчета за това заседание въ год. VI, стр. 74—76 на списанието). Въ него се показва, какъ може да се реши неопредѣленото уравнение.

$$ax + by = c$$

чрезъ прилагане на класическата теорема на Fermat и какъ може по този начинъ да се опредѣли точниятъ брой на цѣлитѣ положителни решения, когато този брой е краенъ.

6. Върху едно свойство на функцията $ax+by$. Спис. на Ф.-Мат. Д-во, год. VI (1910), стр. 297—299.

Известно е, че произведението на две цели числа, представени чрезъ една бинерна квадратна форма (съ цѣли коефициенти) не винаги може ди се представи чрезъ сѫщата форма. Така напр. числата 5 и 11 могатъ да се представятъ чрезъ формата

$$f(x,y)=2x^2+3y^2,$$

понеже $5=f(1,1)$ и $11=f(2,1)$. Но тѣхното произведение $5.11=55$ не може да се представи чрезъ сѫщата форма; въ това се убеждаваме лесно, като замѣстимъ въ $f(x,y)$ буквитѣ x и y съ всички двойки цѣли значения, за които $f(x,y)$ не надминава 55 и броятъ на които е краенъ. Въ разглежданата тукъ статия проф. Ивановъ доказва, че бинернитѣ форми отъ вида ax^2+by^2 притежаватъ следното свойство: произведението на три, или изобщо на нечетенъ брой числа отъ вида ax^2+by^2 може винаги да се представи, и то по нѣколко начина, въ сѫщия видъ. Така, въ горния примѣръ имаме

$$2.5.11=f(1,0).f(1,1).f(2,1)=f(1,6)=f(7,2).$$

До колкото ми е известно, този интересенъ резултатъ отъ композирането на формитѣ, който се обобщава и за произволни квадратни бинерни форми съ цѣли коефициенти, е новъ за науката. Неговото значение за теорията на числата е очевидно.

7. Върху дѣлимостьта на числа отъ вида $\frac{b^m-a^m}{b-a}$ Спис. на Ф.-Мат. Д-во, год. VII (1911), стр. 161—168.

Изследванията върху неопредѣленото уравнение

$$x^m+y^m=z^m$$

изтъкнаха на яве още въ началото на миналия вѣкъ значението, което има при тѣзи изследвания проблемата за разлагане на цѣлитѣ числа отъ вида $\frac{b^m-a^m}{b-a}$ въ произведения отъ прости множители. При това най-голѣмъ интересъ представя случаятъ, когато показательтъ m е нечетно просто число; но тъкмо въ тоя случай въпросното частно е алгебрически неразложимо въ областьта на рационалнитѣ числа, тъй че и проблемата за неговото аритметично разлагане на прости множители (когато a и b сѫ взаимно прости цѣли числа) се усложнява. Въ тази статия проф. Ивановъ си поставя за задача да изследва свойствата на частното $\dfrac{b^m - a^m}{b - a}$, като си служи само съ средствата на елементарната теория на числата, безъ да прибѣгва до разширението на понятието за цѣло число чрезъ адюнгиране на m-титѣ корени на единицата. По този начинъ той доказва следнитѣ свойства на въпросното частно, което той бележи накратко още така:

$$\frac{b^m - a^m}{b - a} = (b, a)_m$$

1) Ако $m = pq$ е съставно, то

$$(b, a)_m = (b^p, a^p)_q \,.\, (b, a)_p \text{ е сжщо съставно;}$$

2) Ако m е нечетно просто число, то числата[1]) $b - a$ и $(b, a)_m$ не могатъ да иматъ другъ общъ делитель освенъ m; за да иматъ общия дѣлитель m, необходимо и достатъчно е $b - a$ да е кратно на m.

3) Ако m и n сж взаимно прости цѣли числа, то и числата $(b, a)_m$ и $(b, a)_n$ сж взаимно прости. По общо, ако d е най-голѣмиятъ общъ дѣлитель на m и n, то $(b, a)_d$ е най-голѣмиятъ общъ дѣлитель на $(b, a)_m$ и $(b, a)_n$;

4) Ако m е нечетно просто число, то всѣки първоначаленъ множитель на $(b, a)_m$, различенъ отъ m, е от вида $2Mm+1$, дето M означава нѣкое цѣло число.

8. Едно свойство на цѣлитѣ рационални числа и решение на неопредѣленото уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Спис. на Ф.-Мат. Д-во, год. X (1925), стр. 267—269.

Това е последната работа на проф. Ем. Ивановъ, писана само единъ месецъ преди смъртьта му нарочно за нашето списание. Въ нея той доказва следното свойство на цѣлитѣ положителни числа: квадратътъ на всѣко цѣло число може да се представи като сборъ отъ три или по-малко квадрати на цѣли числа. Доказателството се основава на класическата теорема на Lagrange, споредъ която всѣко цѣло положително число може де се представи като сборъ отъ четири или по-малко точни квадрати. Съ тази работа чествуваниятъ покойникъ засвидетелствува за лишенъ пжть своята готовность да служи до край на дѣлото, на което бѣше посветилъ най-хубавитѣ години на своя животъ. За насъ тя що остане за винаги скжпъ споменъ и символъ на беззаветната му преданность къмъ това дѣло.

---

[1]) Винаги предполагаме, че b и a сж взаимно прости цѣли числа.

Съ изложеното до тукъ далече не се изчерпва цѣлата научна дейность на покойния нашъ учитель. Съ редица реферати изъ разни области на математиката, рецензии на учебници, полемични статии и задачи той будеше въ нашата младежь интересъ и любовь къмъ математическата наука. Известна е, напримѣръ, полемиката върху прочутия Евклидовъ постулатъ за успореднитѣ линии, която той води съ покойния Ив. Гюзелевъ въ първитѣ годишнини на „Български Прегледъ", когато нашето списание още не бѣше започнало да излиза. Въ тази полемика той сочеше по единъ несъмненъ начинъ погрѣшния пѫть, по който сѫ тръгнали тѣзи у насъ, които хабятъ напраздно силитѣ си, за да докажатъ въпросния постулатъ, игнорирайки прогреса на науката отъ времето на Николай Лобачевски до днесъ. Ако непосрѣдствено следъ откритията на гениалния руски математикъ и на унгареца Iohann Bolyai все можеше да остане въ нѣкой скептикъ сѣнка отъ съмнение въ възможностьта да сѫществува и неевклидова геометрия, то следъ трудоветѣ на Riemann, Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré и др., които ни дадоха, тъй да се каже, осезаеми модели за тази геометрия, въпросътъ бѣ решенъ окончателно: отъ гледището на логиката неевклидовитѣ геометрии иматъ еднакво право на сѫществуване съ Евклидовата. Спорътъ около това, коя отъ тѣхъ е вѣрна, е самъ по себе си безсмисленъ, защото никоя отъ тѣхъ не води къмъ противоречие. — Въ въпросната полемика проф. Ем. Ивановъ не само изтъкваше конкретно погрѣшнитѣ заключения на своя опонентъ, но изрично подчертаваше и това, че всички подобни опити сѫ осѫдени на неуспѣхъ. „Търсеното доказателство за XI-та Евклидова аксиома", казва той, „съставя задача, подобна на задачитѣ: perpetuum mobile, trisectio anguli и quadratura circuli, съ които въ днешно време никой сериозенъ човѣкъ вече се не занимава".

Ако разтворимъ двата печатни годишника за дейностьта на нашето дружество презъ първитѣ години отъ сѫществуването му, ще се убедимъ веднага, че почти всички реферати по това време сѫ били четени лично отъ проф. Ем. Ивановъ, тогавашенъ председатель на дружеството, или пъкъ темитѣ имъ сѫ били задавани отъ него. Разнообразието на тѣзи теми свидетелствува за обширнитѣ познания и интереси, които той имаше къмъ разнитѣ клонове на чистата и приложна математика.

Въ лицето на професоръ Емануилъ Ивановъ ние изгубихме единъ ученъ и педагогъ, който даде предъ жертвеника на родната просвѣта и наука всичко, каквото можеше. Ала това, което смъртьта не можа да ни отнеме, то е примѣрътъ за преданность до самоотричане къмъ просвѣтното дѣло, която той завеща на тѣзи, които съ гордость се наричатъ негови ученици. Нека този примѣръ да ни служи като факелъ, който да освѣтява нашия пѫть въ неизвестното бѫдаще. Поставяйки, както нашиятъ учитель, интереса на истината надъ всички други интереси, ний ще се отплатимъ най-достойно за всичко, което сме научили отъ него. Поклонъ предъ свѣтлата му паметь!