

УВОДЪ
ВЪ
ТЕОРИЯТА НА АНАЛИТИЧНИТЪ ФУНКЦИИ

ОТЪ

Д-ръ ЛЮБОМИРЪ ЧАКАЛОВЪ
редовенъ професоръ по Висши анализъ въ Соф. университетъ.



СОФИЯ
ПЕЧАТНИЦА ХУДОЖНИКЪ
1931

УВОДЪ
ВЪ
ТЕОРИЯТА НА АНАЛИТИЧНИТЪ ФУНКЦИИ

ОТЪ

Д-ръ ЛЮБОМИРЪ ЧАКАЛОВЪ

редовенъ професоръ по Висши анализъ въ Соф. университетъ.



СОФИЯ
ПЕЧАТНИЦА ХУДОЖНИКЪ
1931

В. Дойчинов

На паметта на своя пръв
учител по анализъ и предше-
ственикъ по катедра,

проф. Емануилъ Ивановъ,
посвещава този си трудъ

Авторътъ.

СЪДЪРЖАНИЕ.

Глава I. Комплексни числа и действия съ тѣхъ.

	стр.
§ 1. Исторически бележки	1
§ 2. Аритметична теория на комплекснитѣ числа	3
§ 3. Геометрично представяне на комплекснитѣ числа	9
Задачи	18

✓ Глава II. Линейни трансформации.

§ 4. Предварителни бележки. Функцията $z' = z + a$	21
§ 5. Функцията $z' = az$	22
§ 6. Цѣла линейна функция и най-общата подобна трансформация	24
§ 7. Функцията $\frac{1}{z}$ и трансформацията чрезъ реципрочни радиуси (инверзия)	26
§ 8. Най-общата дробна линейна функция	28
Задачи	31

✓ Глава III. Безкрайни редици и безкрайни редове.

§ 9. Безкрайни редици	33
§ 10. Теорема на Bolzano-Weierstrass	36
§ 11. Принципъ на Cauchy за сходимостъ на една редица	38
§ 12. Безкрайни редове	39
Задачи	46

✓ Глава IV. Функции на една комплексна промѣнлива.

§ 13. Съвкупности (ансамбли) отъ точки	50
§ 14. Най-обща идея за функционална зависимостъ	56
§ 15. Непрекъснатостъ	56
§ 16. Равномѣрна непрекъснатостъ	58
§ 17. Производна на една функция. Понятие за аналитична функция на една комплексна промѣнлива	62
§ 18. Условия за аналитичностъ на една функция, представена въ вида $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$	65
§ 19. Конформно изображение	70
Задачи	73

✓ Глава V. Степенни редове.

§ 20. Область на сходимостъ на единъ степененъ редъ	74
§ 21. Теорема на Cauchy-Hadamard за радиуса на сходимостъ на единъ степененъ редъ	78

VIII

§ 22. Смѣтане съ степенни редове	80
§ 23. Диференциране на степеннитѣ редове	84
§ 24. Принципъ за сравняване на коефициентитѣ	88
§ 25. Непрекъснатостъ на единъ степененъ редъ върху периферията на кръга на сходимостъ. Теорема на Abel	89
Задачи	94

✓ Глава VI. Елементарни трансцендентни функции.

§ 26. Дефиниция и свойства на показателната функция e^z	97
§ 27. Тригонометричните функции $\sin z$, $\cos z$ и $\operatorname{tg} z$	101
§ 28. Логаритмичната функция $\operatorname{Log} z$	103
§ 29. Развиване на $\operatorname{Log}_b(1+z)$ въ степененъ редъ	108
§ 30. Дефиниция на степента z^m за комплексни значения на показателя m . Биноменъ редъ	111
§ 31. Обратнитѣ кръгови функции $\operatorname{arc} \operatorname{tg} z$, $\operatorname{arc} \sin z$ и пр.	116
Задачи	118

✓ Глава VII. Интегриране между имагинерни граници. Основна теорема на Cauchy. Следствия.

§ 32. Дефиниция на крива линия	122
§ 33. Дефиниция на линейенъ интегралъ на една комплексна функция.	128
§ 34. Свойства на линейнитѣ интеграли	133
§ 35. Пресмѣтане на линейнитѣ интеграли	135
Задачи	140
§ 36. Основна теорема на Cauchy	140
§ 37. Непосрѣдствени обобщения на теоремата на Cauchy	150
§ 38. Връзка между опредѣленъ и неопредѣленъ интегралъ	153

✓ Глава VIII. Основна формула на Cauchy. Следствия.

§ 39. Основна формула на Cauchy	158
§ 40. Интегрални формули за производнитѣ	150
§ 41. Пресмѣтане на нѣкои реални интеграли чрезъ прилагане на основната теорема на Cauchy	165
§ 42. Теорема на Taylor	172
§ 43. Следствия	177
§ 44. Нули (корени) на една функция	181
§ 45. Неравенства на Cauchy за коефициентитѣ на Taylor'овия редъ.	184
§ 46. Теорема на Liouville	191
Задачи	194

✓ Глава IX. Функционни редици и редове.

§ 47. Равномѣрна сходимостъ	197
§ 48. Критерии за непрекъснатостъ и за почленна интегруемостъ	204
§ 49. Теорема на Weierstrass за равномѣрно сходящитѣ редици отъ холоморфни функции	702

§ 50. Теорема на Vitali	221
Задачи и упражнения	232

✓ Глава X. Теорема на Laurent. Полюси и изолирани съществени особени точки.

§ 51. Теорема на Laurent	235
§ 52. Полюси и изолирани съществени особени точки	240
§ 53. Теорема за резидуумитъ. Приложения	249
§ 54. Логаритмичен индикаторъ. Теорема на Rouché	262
Задачи	267

✓ Глава XI. Обратни функции. Редове на Lagrange и Bürmann.

§ 55. Обратни функции	272
§ 56. Lagrange'овъ редъ	277
§ 57. Bürmann'овъ редъ	282

Глава XII. Аналитично продължение.

§ 58. Принципъ за аналитично продължение	284
§ 59. Аналитично продължение на реалнитъ функции	290
§ 60. Непосрѣдствено продължение на единъ Taylor'овъ редъ	298
§ 61. Моногенна система отъ степени редове. Дефиниция на аналитична функция посрѣдствомъ една такава система	309
§ 62. Аналитично продължение по една джга. Теорема на Poincaré-Volterra	323
§ 63. Особени точки на аналитичнитъ функции	331
§ 64. Еднозначни клонове на една аналитична функция. Теорема за монодромность	336
§ 65. Аналитични функции съ отнапредъ дадени естествени граници	340
§ 66. Принципъ за перманентность на функционнитъ уравнения	347

Глава XIII. Цѣли функции.

§ 67. Безкрайни произведения	349
§ 68. Дефиниция и общи свойства на цѣлитъ функции	361
§ 69. Цѣли функции съ безбройно много нули. Теорема на Weierstrass за представянето имъ като безкрайни произведения	364
§ 70. Еднозначни функции съ произволна областъ на съществуване. Задачи	380
Задачи	386

Глава XIV. Безкрайно отдалечената точка. Мероморфни функции.

§ 71. Безкрайно отдалечената точка	390
§ 72. Мероморфни функции	397
§ 73. Euler'овата Γ -функция	405
Задачи	417

Глава XV. Неявни и алгебрични функции.

- § 74. Неявни функции 418
 § 75. Алгебрични функции 423

Глава XVI. Периодични и елиптични функции.

- § 76. Периодични функции 435
 § 77. Разпредѣление на периоднитѣ точки. Просто-периодични и
 двупериодични функции 441
 § 78. Дефиниция на елиптичните функции. Основни свойства и
 общи теореми 446
 § 79. Дефиниция и общи свойства на функциитѣ $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$. . . 456
 § 80. Диференциалното уравнение на $\wp(z)$. Следствия 463
 § 81. Изразяване на елиптичните функции чрезъ $\sigma(z)$ 469
 § 82. Събирателната теорема за $\wp(z)$ 471
 § 83. Изразяване на елиптичните функции чрезъ $\zeta(z)$ 474
 § 84. Изразяване на елиптичните функции чрезъ $\wp(z)$ 476
 § 85. Общи теореми за елиптичните функции 478
 § 86. $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$ като функции на тритѣ аргумента z , ω , ω' . . 480
 § 87. Функцията $\theta(z')$ 483
 § 88. Представяне на $\theta(z')$ като безкрайно произведение 487
 § 89. Изразяване инвариантитѣ g_2 и g_3 като функции на q 490
 § 90. Еквивалентни двойки. Еквивалентни числа 492
 § 91. Абсолютната инварианта $J(\tau)$ 496