

УНИВЕРСИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА

№ 37.

---

# АНАЛИТИЧНА МЕХАНИКА

---

отъ

ИВАНЪ ЦЕНОВЪ

редовенъ професоръ въ университета.

---

## ТОМЪ ВТОРИ

ДВИЖЕНИЕ НА МАТЕРИАЛНИ СИСТЕМИ. — ЕЛАСТИЧНОСТЬ. —  
ХИДРОСТАТИКА, — ХИДРОДИНАМИКА.

---

ИЗДАНИЕ НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТЪ.



СОФИЯ  
ПЕЧАТНИЦА „ХУДОЖНИКЪ“  
1924.

- 85 14. Теорема за колинеарността на вектори със отрицателни кофициенти при равенство на вектори . . . . .  
 85 15. Теорема за равенство на вектори със отрицателни кофициенти при равенство на вектори . . . . .  
 86 16. Теорема за равенство на вектори със отрицателни кофициенти при равенство на вектори . . . . .  
 86 17. Теорема за равенство на вектори със отрицателни кофициенти при равенство на вектори . . . . .  
 86 18. Теорема за равенство на вектори със отрицателни кофициенти при равенство на вектори . . . . .

## Съдържание

### ЧАСТЬ IV.

#### **Движение на материални системи.**

##### ГЛАВА I.

###### **Теория на инерчните моменти.**

###### I. Дефиниции и свойства на инерчните моменти.

	Стр.
480. Дефинции . . . . .	5
481. Жирационенъ радиусъ . . . . .	6
482. Инерчни произведения . . . . .	6
483. Релация между инерчните моменти, взети спрямо успоредни прости . . . . .	7
484. Релация между инерчните моменти, взети спрямо прости, които се пресичатъ . . . . .	9
485. Инерченъ елипсоидъ . . . . .	11
486. Централенъ инерченъ елипсоидъ . . . . .	15
487. Условие, че една праща да бъде главна инерчна ось за една отъ нейните точки . . . . .	16
488. Условие, за да бъде една праща главна инерчна ось за две отъ нейните точки . . . . .	18

###### II. Опредѣляне на инерчните моменти на една непрекъсната система отъ материални точки.

###### Примери.

489. Опредѣляне на инерчните моменти . . . . .	18
490. Примери . . . . .	20

##### ГЛАВА II.

###### **Общи теореми върху движението на една свободна материална система.**

###### I. Диференциални уравнения на движението за една свободна материална система.

491. Свободна материална система . . . . .	27
492. Вътрешни и външни сили . . . . .	27

493. Диференциални уравнения на движението . . . . .	28
494. Произволни константи . . . . .	29
495. Определяне на произволните константи . . . . .	30
496. Интеграли на единъ динамичен проблем . . . . .	30

## II. Теорема за количествата на движението. Теорема за движението на центъра на тежестта.

497. Доказателство на теоремата . . . . .	31
498. Теорема за движението на центъра на тежестта . . . . .	34
499. Примери . . . . .	35

## III. Теорема за моментите на количествата на движението, Теорема за площите.

500. Доказателство на теоремата . . . . .	36
501. Теорема за площите . . . . .	39
502. Равнина на максимума на площите . . . . .	40

## III. Теорема за живата сила.

503. Доказателство на теоремата . . . . .	41
504. Работа на вътрешните сили . . . . .	42
505. Интегралъ на живата сила . . . . .	44
506. Примеръ . . . . .	46

## V. Резюме на горните теореми.

507. Седем общи уравнения за движението на една каква да е свободна материална система . . . . .	47
508. Случай на равновесие . . . . .	48

## VI. Разширение на общите теореми за релативното движение на една система.

509. Случай, когато подвижните оси (сравнителната система) притежават най-общо движение . . . . .	49
510. Случай, когато подвижните оси притежават една праволинейна и равномърна транслация . . . . .	50
511. Случай, когато подвижните оси имат началото си върху центъра на тежестта на системата и притежават трансляционно движение . . . . .	50
512. Теорема I-а . . . . .	51
513. Теорема II-а . . . . .	53

## ГЛАВА V.

Стр.

514. Теорема за количествата на движението върху релативното движение около центъра на тежестта . . . . .	54
515. Теорема за моментите на количествата на движението върху релативното движение около центъра на тежестта . . . . .	55
516. Теорема за живата сила върху релативното движение около центъра на тежестта . . . . .	59
517. Забележка . . . . .	62

## ГЛАВА III.

**Енергия на една материална система.**

518. Централни сили . . . . .	63
519. Консервативна система . . . . .	64
520. Потенциална енергия . . . . .	65
521. Принципът за запазване на енергията . . . . .	66
522. Примери . . . . .	68
523. Енергия на естествена система . . . . .	73

## ГЛАВА IV.

**Движение на несвободна материална система.****I. Общи съображения.**

524. Несвободна материална система . . . . .	77
525. Сили на връзките . . . . .	77
526. Друго разделяне на приложените сили на една система . . . . .	77
527. Холономна и нехолономна система. Уравнения на връзките на холономна и нехолономна система . . . . .	78

**II. Приложение на общите теореми върху движението на несвободна материална система.**

528. Теоремите за количествата на движението (или за движението на центъра на тежестта) и за моментите на количествата на движението на несвободна материална система . . . . .	79
529. Теоремата за живата сила на несвободна материална система . . . . .	80
530. Решаване на динамични проблеми . . . . .	81
531. Примеръ I . . . . .	81
532. Примеръ II . . . . .	83
533. Примеръ III . . . . .	87
534. Примеръ IV . . . . .	90
535. Примеръ V . . . . .	93
536. Примеръ VI . . . . .	96
537. Примеръ VII . . . . .	100

— 538. Примеръ VIII . . . . .	102
539. Примеръ IX . . . . .	104
— 540. Примеръ X . . . . .	108

### III. Принципъ на d'Alembert. Общо уравнение на динамиката.

#### а) Изразъ на принципа на d'Alembert.

541. Дефиниции . . . . .	111
542. Принципъ на d'Alembert . . . . .	112
543. Примеръ . . . . .	115
544. Случай на гъвкави системи . . . . .	118
545. Разширение принципа за виртуалните работи във динамиката на системите . . . . .	119
546. Примеръ I . . . . .	121
547. Примеръ II . . . . .	123

#### б) Общо уравнение на динамиката за една несвободна материална система.

548. Общо уравнение на динамиката . . . . .	125
549. Редукция на уравненията за движението във минимално число . . . . .	125
550. Метода на множителите на Lagrange за една холономна система . . . . .	128
551. Примеръ I . . . . .	130
552. Примеръ II . . . . .	132
553. Примеръ III . . . . .	135
554. Примеръ IV . . . . .	141

#### в) Общи теореми на динамиката, изведени от принципа на d'Alembert.

555. Приложение принципа на d'Alembert за една свободна материална система . . . . .	145
556. Теорема за количествата на движението . . . . .	146
557. Теорема за моментите на количествата на движението . . . . .	147
558. Теорема за живите сили . . . . .	148

## ГЛАВА V.

### Теория на перкусиите.

559. Дефиниция . . . . .	150
--------------------------	-----

560. Перкусии, приложени на една материална точка . . . . .	152
---	-----

561. Действието на обикновените сили е нула презъ траянето на една перкусия . . . . .	155
---	-----

562. Теореми, отнасящи се за една материална точка . . . . .	155
--	-----

## II. Перкусии, приложени на една система.

563. Общи теореми . . . . .	156
-----------------------------	-----

## III. Общо уравнение на теорията за перкусиите. Теорема на Carnot.

564. Общо уравнение на теорията за перкусиите . . . . .	159
---	-----

565. Примеръ . . . . .	163
------------------------	-----

566. Забележка . . . . .	164
--------------------------	-----

567. Теорема на Carnot . . . . .	164
----------------------------------	-----

## ГЛАВА VI.

### Движение на холономни материални системи.

#### I. Уравнения на Lagrange.

568. Холономни системи . . . . .	169
----------------------------------	-----

569. Уравнения на Lagrange . . . . .	170
--------------------------------------	-----

570. Случай, когато съществува една функция на сили . . . . .	175
---	-----

571. Интегралъ на живите сили . . . . .	176
---	-----

572. Случай, когато параметрите не съз независими . . . . .	178
---	-----

573. Примеръ I . . . . .	179
--------------------------	-----

574. Примеръ II . . . . .	181
---------------------------	-----

575. Примеръ III . . . . .	183
----------------------------	-----

576. Примеръ IV . . . . .	184
---------------------------	-----

577. Приложение на уравненията на Lagrange за релативното движение . . . . .	187
--	-----

578. Примеръ I . . . . .	193
--------------------------	-----

	Стр.
579. Примеръ II . . . . .	196
580. Приложение на уравненията на Lagrange въ теорията на пер- кусиитъ . . . . .	202
581. Примеръ I . . . . .	204
582. Примеръ II . . . . .	205
<b>II. Теория на малките движения на една система около едно положение на стабилно равновесие.</b>	
583. Стабилност на равновесието . . . . .	207
584. Малки движения . . . . .	208
585. Примеръ I . . . . .	214
586. Примеръ II . . . . .	216
<b>III. Канонични уравнения. Теорема на Jacobi.</b>	
587. Трансформация на Poisson и на Hamilton . . . . .	219
588. Канонични уравнения . . . . .	222
589. Частенъ случай, при който връзките съз независими от времето . . . . .	223
590. Забележка . . . . .	225
591. Примеръ . . . . .	227
592. Теорема на Jacobi . . . . .	228
593. Частенъ случай, когато $t$ не фигурира въ коефициентите на уравнението на Jacobi . . . . .	238
594. Примеръ I . . . . .	241
595. Примеръ II . . . . .	248
596. Примеръ III . . . . .	259
597. Примеръ IV . . . . .	263
<b>IV. Теорема на Poisson.</b>	
598. Първи интеграли и какви да съз интеграли на уравненията за движението . . . . .	266
599. Условие, за да бъде $f = C$ единъ пръвъ интеграл . . . . .	268
600. Теорема на Poisson . . . . .	270
601. Случай, когато $H$ не съдържа времето. Забележка върху инте- грала на живата сила . . . . .	274
602. Примеръ . . . . .	275
<b>V. Принципъ на Hamilton. Принципъ на най-мал- кото действие. Принципъ на Gauss.</b>	
603. Принципъ на Hamilton . . . . .	278
604. Частно диференциално уравнение на Hamilton . . . . .	284

605. Принципъ на най-малкото действие . . . . .	Стр.
606. Принципъ на най-малкото принуждение (Gauss) . . . . .	291
607. Движение на нехолономни материални системи . . . . .	305

## ГЛАВА VII.

### Движение на нехолономни материални системи.

#### I. Общи уравнения на движението.

607. Нехолономни системи . . . . .	312
608. Метода на Routh за намиране общите уравнения на движението . . . . .	313
609. Метода на Appell за намиране общите уравнения на движението на една каква да е система, холономна или нехолономна . . . . .	314
610. Теорема аналогична на теоремата на Koenig за живата сила . . . . .	319
611. Друга метода за намиране общите уравнения на движението . . . . .	321
612. Забележки . . . . .	333

#### II. Канонична форма, съ единъ добавъченъ членъ, на уравненията на движението. Принципа на Hamilton, приспособенъ за нехолономни системи.

613. Канонична форма, съ единъ добавъченъ членъ, на уравненията на движението . . . . .	348
614. Принципъ на Hamilton, приспособенъ за нехолономни системи . . . . .	356

## ГЛАВА VIII.

### Други различни форми на общите уравнения за движението на материалните системи.

615. Случай на холономни системи . . . . .	360
616. Случай на нехолономни системи . . . . .	369

## ГЛАВА IX.

### Динамика на твърдите тела.

#### I. Движение на едно твърдо тяло около една постоянна ось.

617. Уравнение на движението . . . . .	383
618. Реакции на осъта . . . . .	386

## VIII

619. Перманентни оси и естествени оси на въртението . . . . .	390
620. Сложно махало . . . . .	392
621. Машина на Atwood . . . . .	396
622. Събиране на инерчните сили . . . . .	400
623. Перкусии, приложени на едно твърдо тяло, което се движи около една постоянна ось . . . . .	402
624. Балистично махало . . . . .	409
625. Примеръ . . . . .	413

## II. Движение на едно твърдо тяло, успоредно на една постоянна равнина.

626. Уравнения на движението . . . . .	415
627. Примеръ I . . . . .	418
628. Примеръ II . . . . .	422
629. Примеръ III . . . . .	427

## III. Движение на едно твърдо тяло около една постоянна точка.

### a) Обща теория.

630. Euler'ови жгли . . . . .	429
631. Жива сила и резултантенъ моментъ на количествата на дви- жението . . . . .	433
632. Уравнения на движението (Euler) . . . . .	434
633. Приложение методата на Lagrange . . . . .	436
634. Приложение методата на Appell . . . . .	439
635. Приложение уравнения II въ т. 615 . . . . .	440
636. Реакция на постоянната точка . . . . .	442

### b) Случай, при който директно приложените сили се редуциратъ постоянно на една единствена сила, минаваща презъ постоянната точка.

637. Първи интеграли . . . . .	444
638. Изучаване на движението: интегриране чрезъ елиптични функции . . . . .	445
639. Метода на Poinsot . . . . .	451
640. Полодия, херполодия . . . . .	456
641. Стабилност или нестабилност на главните оси . . . . .	467
642. Частни начални условия. Ротация около главните инерчни оси . . . . .	470
643. Случай, при който инерчния елипсоидъ за $\alpha = 0$ е връщателенъ . . . . .	475

— в) Друга форма на общите уравнения на движението за случая на едно твърдо, вращателно, хомогенно тяло, закачено за една точка от неговата ось.

644. Уравнения на движението (Resal) . . . . . 477

645. Приложение . . . . . 484

— г) Движение на твърдо, тежко, вращателно, хомогенно тяло, закрепено за една точка от вращателната ось.

(Lagrange и Poisson).

646. Уравнения на движението . . . . .	488
647. Частен случай . . . . .	497
648. Забележка . . . . .	504
	508
649. Жирокопът на Foucault . . . . .	506
650. Два начина за третиране на проблема . . . . .	506

### е) Жирокопична пусула на Foucault. Барожирокопът на Gilbert.

651. Релативно движение на една тежка система относно земята, като държим смътка за движението на земята . . . . .	514
652. Жирокопът със директорна равнина . . . . .	520
653. Жирокопична пусула на на Foucault . . . . .	524
654. Барожирокопът на Gilbert . . . . .	526

### ж) Перкусиони приложени на едно твърдо тяло, подвижно около една постоянна точка.

655. Перкусиони, приложени на едно твърдо тяло, подвижно около една постоянна точка . . . . .	530
656. Случай на една перкусия . . . . .	531
657. Примеръ . . . . .	531

## IV. Движение на едно съвършенно свободно твърдо тяло.

658. Уравнения на движението . . . . . 534

659. Прости примери . . . . . 536

660. Перкусиони, приложени на едно твърдо съвършенно свободно тяло 537

661. Изчисляване на вариацията на живата сила, претърпена от едно твърдо тяло, вследствие на една само перкусия . . . . . 538

## ГЛАВА X.

### Движение на естествени твърди тѣла.

#### I. Триене на хлъзгане, на търкаляне и на вретенообразно въртене.

662. Общи съображения . . . . . 542

##### a) Триене на хлъзгане.

663. Триене на хлъзгане . . . . .	543
664. Възможни прекъсвания въ уравненията на движението . . . . .	546
665. Движение на тежък цилиндър върху наклонена равнина . . . . .	547
666. Движение на една стълба . . . . .	555
667. Движение на една тежка хомогенна сфера върху една грапава хоризонтална равнина . . . . .	559

##### b) Триене на търкаляне . . . . . 560

668. Триене на търкаляне . . . . .	567
669. Търкаляне . . . . .	570
670. Търкаляне на един кръговъ хомогенен цилиндър върху една хоризонтална равнина . . . . .	571
671. Търкаляне, въ една вертикална равнина, върху една хоризонтална права на един кръговъ диск . . . . .	573
672. Забележка . . . . .	574

## II. Ударъ на твърдите тѣла.

673. Директен ударъ на две сфери . . . . .	574
674. Неправъ ударъ на две сфери . . . . .	581
675. Ударъ на две какви да сѫ тѣла . . . . .	585
676. Ударъ на една сфера върху една хоризонтална равнина . . . . .	588

## ГЛАВА XI.

### Нѣколко проблеми отъ движението на твърдите тѣла.

#### I. Движение на едно твърдо, вращателно, хомогенно, тежко тѣло върху една хоризонтална постоянна равнина, съвършенно гладка.

677. Уравнения на движението . . . . .	592
678. Пумпаль . . . . .	596

679. Забележка на Pulseux	598
680. Други начини за намиране общите уравнения за движението на пумпала	600
<b>II. Движение на обръча.</b>	
681. Уравнения на движението	605
682. Други начини за намиране уравненията на движението	611
<b>III. Движение на една сфера върху една хоризон- тала равнина на земната повърхнина.</b>	
683. Предварителна бележка	617
684. Случай, когато хоризонталната равнина е съвършено гладка и тяжестта е постоянна сила	617
685. Случай, когато хоризонталната равнина е също съвършено гладка, но привличането е една постоянна сила	622
686. Случай, когато хоризонталната равнина е съвършено гръбла и тяжестта е една постоянна сила	530
687. Случай, когато хоризонталната равнина е също съвършено гръбла, но привличането е една постоянна сила	634
<b>IV. Равновесие на велосипеда.</b>	
688. Уравнения на равновесието	641
689. Забележка	649
<b>ЧАСТЬ V.</b>	
<b>Еластичность. — Хидростатика. — Хидродинамика.</b>	
ГЛАВА I.	
<b>Геометрия и кинематика на непрекъснатите системи изобщо.</b>	
<b>I. Общи съображения върху непрекъснатите системи и тъхните деформации.</b>	
690. Непрекъснати материални системи	653
691. Деформация. Преместване	654
692. Основни формули	654
693. Безкрайно малка деформация	659
694. Уравнение на непрекъснатостта	660

<b>ВЕД</b>	<b>II. Линейно, жгълно и кубично разширение.</b>	666
695. Линейно разширение . . . . .	666	
696. Жгълно разширение . . . . .	666	
697. Тълкуване на функциите $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ; разширение на елементите, първоначално успоредни на координатните оси . . . . .	669	
698. Тълкуване на функциите $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ; жгълни разширения, във една точка, на жгли съ успоредни страни на координатните оси . . . . .	670	
699. Хълзгания . . . . .	671	
700. Елипсоидът на разширенията във една точка . . . . .	673	
701. Кубично разширение . . . . .	676	

**III. Крайна, безкрайно малка, напречна (трансверзална) и надлъжна (лонгитудинална) или иротационна деформации.**

702. Крайна деформация . . . . .	677
703. Безкрайно малка деформация . . . . .	679
704. Напречна (трансверзална) деформация . . . . .	683
705. Надлъжна (лонгитудинална) или иротационна деформация . . . . .	683
706. Резюме на една безкрайно малка деформация . . . . .	684
707. Случай, когато сжинската деформация е нула . . . . .	684

**IV. Скорость, ускорение и други дефиниции при движението на непрекъснатите системи.**

708. Скорость и ускорение; уравнение на непрекъснатостта . . . . .	687
709. Линии на течението или на потока във единъ даденъ моментъ . . . . .	692
710. Потокъ и циркуляция по дълчината на една дадена крива във момента $t$ . . . . .	694
711. Средна ротация или вихъръ във една точка за единъ даденъ моментъ . . . . .	695
712. Линии на вихъра . . . . .	698
713. Потенциалъ на скоростите; иротационно или невихрово движение	699

**ГЛАВА II.**

**Статика и динамика на непрекъснатите системи изобщо.**

**i. Сили, действуващи върху една непрекъсната система.**

**а) Външни сили.**

714. Външни сили . . . . .	701
<b>б) Вътрешни усилия.</b>	706
715. Усилие върху единъ изолиранъ елемент . . . . .	703
716. Специфични усилия . . . . .	705

717. Управителна повърхнина отъ II-а степень	710
718. Елипсоидъ на усилията	713

## II. Общи уравнения за вътрешно равновесие и за вътрешно движение на непрекъснатите системи.

719. Означение на методата	715
720. Шесте необходими уравнения за равновесие и за движение	716
721. Общи уравнения за вътрешно равновесие и за вътрешно движение	717
722. Приложение на принципа за виртуалните работи	722

## ГЛАВА III.

### Еластичност.

#### I. Релации между деформациите и усилията във едно тяло.

723. Предметът на теорията за еластичността	727
724. Естествено състояние	727
725. Законът на Hooke	727
726. Принципът на редукцията	729
727. Случай на хомогенна и изотропна среда	734
728. Забележка	738

#### II. Еластично равновесие.

729. Неопределени уравнения	739
730. Определени уравнения	741
731. Уравнение на кубичното разширение	743
732. Функция на преместванията	744

#### III. Примери отъ еластично равновесие.

##### а) Нормално и равномърно свиване на едно изотропно тяло.

733. Нормално и равномърно свиване	746
734. Коефициентъ на свиваемостта	748

##### б) Надлъжно разтъгане на единъ цилиндър.

735. Надлъжно разтъгане на единъ правъ цилиндър, съ каквато и да е основа, чрезъ равномърни опъвания, които действуват върху основите	749
---	-----

736. Коефициентъ на еластичността	751
737. Отношение на напречното свиване съ надлъжното разширение	752
 в) Равновесие на единъ цилиндриченъ пластъ.	
738. Равновесие на единъ цилиндриченъ пластъ	752
 <b>IV. Движение на еластичните тѣла.</b>	
739. Общи уравнения	757
740. Прости движения или движения чрезъ равнинни вълни	759
741. Разпространение на свѣтлината	765
742. Разпространение на свѣтлината въ една кристализирана срѣда	765
 ГЛАВА IV.	
 Хидростатика.	
 I. Общи свойства на флуидите.	
743. Предметъ на хидростатиката. Идеални флуиди	768
744. Налѣгане въ една точка	769
 II. Общи уравнения за движението на флуидите.	
745. Уравнения за равновесие на единъ флуидъ	771
746. Приложение на принципа за виртуалните работи	772
747. Единствено уравнение за равновесие	773
748. Характеристично уравнение на единъ флуидъ	774
749. Повърхнини на еднакво налѣгане, на еднаква гъстота и изотермни повърхнини	775
750. Принципъ на Pascal	775
751. Случай на газъ съ постоянна температура	776
752. Случай на единъ какъвъ да е флуидъ съ промѣнлива температура	777
753. Равновесие на тежъкъ флуидъ	779
754. Барометрично нивелиране	780
755. Тежки флуиди, наложени единъ върху другъ	782
755. Релативно разновесие на една тежка течностъ въ единъ върхъ се сѫдъ	782
 III. Налѣгане на тежъкъ флуидъ върху стени.	
757. Налѣгане върху твърда стена	786
758. Налѣгане въ една точка	787

759. Товарна равнина . . . . .	787
760. Налѣгане върху една равнинна стена . . . . .	788
761. Центъръ на налѣгането . . . . .	789
762. Принципъ на Archim��de . . . . .	790
<b>IV. Равновесие на плавающитѣ тѣла.</b>	
763. Общи условия за равновесието . . . . .	793
764. Хомогенна трижгълна призма . . . . .	795
765. Пълно опредѣляне на положението за равновесие . . . . .	798
766. Примери . . . . .	799
767. Забележка . . . . .	802

**ГЛАВА V,****Хидродинамика.****I. Уравнения на Lagrange и на Euler за движението на идеалните флуиди.**

768. Предметъ на хидродинамиката . . . . .	803
769. Неопределени уравнения . . . . .	803
770. Допълнително уравнение . . . . .	807
771. Условия на повърхнината . . . . .	808
772. Случай, когато гжстотата е функция на налѣгането . . . . .	810
773. Теорема на Lagrange . . . . .	815

**II. Уравнения на Helmholtz.**

774. Нова форма на уравненията за движението . . . . .	821
775. Уравнения на Helmholtz . . . . .	822

**III. Перманентно движение.**

776. Перманентно движение . . . . .	826
777. Перманентно движение въ случая, когато силите произхождатъ отъ функция на сили $U(x, y, z)$ и когато $\rho$ е функция на $p$ . . . . .	827
778. Перманентно движение на тежки флуиди. Теорема на Bernoulli. . . . .	831
779 Приложение на теоремата за живите сили . . . . .	832
780 Забележка . . . . .	834
781. Изтичане на единъ флуидъ. Формули на Toricelli, на Navier и на Zeuner . . . . .	835

