

УНИВЕРСИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА № 336

---

**ОСНОВИ**  
НА  
**АНАЛИТИЧНАТА ГЕОМЕТРИЯ**

ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО ИЗДАНИЕ

ОТ

Д-р Д. СТ. ТАБАКОВ

РЕДОВЕН ПРОФЕСОР ПРИ СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

„Quand on médite sur l'histoire des mathématiques appliquées, on est effectivement conduit à attribuer leurs principales découvertes, leurs progrès les plus décisifs à l'association d'analyse et de la géométrie“.

LAMÉ



СОФИЯ  
УНИВЕРСИТЕТСКА ПЕЧАТНИЦА  
1947

## ПРЕДГОВОР

В настоящето издание на лекциите ми по аналитична геометрия е запазен, изобщо, реда на материята в първото издание на университетската библиотека. Обаче, въпреки това направени са следните промяни: параграфите 117, ..., 124 засягат линейните системи уравнения и геометричните приложения, които са проведени с нуждната изисканост; първични познания и приложения на векторното смятане са изложени в параграфите 125, ... 146.

Незначително изменение има върху свойствата на двойното отношение на четири елемента в една основна фигура от първи ред. В § 351 са направени повече обстояни разглеждания върху тангенциалното уравнение на повърхнините от втора степен. Сеченията на успоредни равнини с една повърхнина от втора степен са разгледани с нуждната точност. В § 370 е застъпено разглеждането на равностранный конус. В това издание за елиптическия и хиперболичния параболоиди са посочени повече свойства. В §§ 384—390 са направени разисквания върху формулите на Richelot, изведени са трансформациите на Lorentz заедно с приложението им в релативната теория. В § 395 са направени допълнения върху произведения от инверзии. В § 396 и 397 е дадена хомографичната трансформация на сферата сама в себе и проективната трансформация от гледна точка на теорията на функциите. Придобивките на Smith върху двете двойки хомографични хомофокални повърхнини са дадени в § 410.

Част шеста е нова и съдържа тетрацикличните координати с приложението им и цикликите (§§ 413—424). Линейните координати на Plücker са дадени с векторно смятане в § 433.

Тези са главните изменения в настоящето издание. И в това издание се държи за съвместно прилагане методите на аналитичната и проективна геометрии.

И при второто издание приятно ми е да изкажа изрично моята благодарност на извънредния професор Г-н Боян Петканчин, който драговошно си предложи съдействието. Последният прегледа и допълни отчасти част осма, която съдържа „Хиперболична геометрия в равнината“. Тези разглеждания, с изключение на част от историчните бележки, се дължат на проф. Петканчин. Последният ми обърна вниманието върху необходимостта да се запази единството на двете определения на плюкеревите координати на правата линия.

И сега е отдадено нужно внимание за пълнота, системност и единство в методите, прокарани в учебника.

Ще отговаря на действителността, че тези начинаещи, които желаят да работят пламенно в математиката, ще намерят разнообразна материя с приложения в сборника, нагоден към учебника.

Изказвам с удоволствие моята благодарност към факултетния и Академическия съвети, на които се дължи издаването на настоящия учебник.

Дълга моята благодарност и на студента г. Ив. Ангелов за изработване на чертежите за клишетата. Ценно съдействие получих при изработване на чертежи и преглеждане на всички втори коректури на учебника от студента архитект г. Коста Джелебов. На последния изказвам моята гореща признателност.

София, 22 юни, 1947.

Д. СТ. ТАБАКОВ

#### ИЗПОЛЗВАНИ СЪЧИНЕНИЯ

Joseph Carnoy, Cours de géométrie analytique (Paris, 1899).

G. Salmon, Traité de géométrie analytique (френски и немски издания).

Guido Castelnuovo, Lezioni di Geometria analitica (Milano, 1924).

Reye, Geometrie der Lage.

D-r Karl Kommerell, Vorlesungen über analytische geometrie der Ebene, 1941, Leipzig.

D-r Karl Kommerel, Vorlesungen über analytische teometrie des Raumes 1940, Leipzig.

Gaston Darboux, Principes de géométrie analytique, Paris, Gauthier — Villars, 1917.

# СЪДЪРЖАНИЕ

## ЧАСТ ПЪРВА

### Основни формули на аналитичната геометрия в равнината

	стр.
§ 1. Ориентирана права (полуправа) . . . . .	1
„ 2. Дефиниция на сегмент . . . . .	1
„ 3. Основно свойство на три точки . . . . .	1
„ 4. Проектиране върху една полуправа успоредно на една равнина . . . . .	2
„ 5. Многоъгълен контур . . . . .	2
„ 6. Теорема за проекциите . . . . .	2
„ 7. Коефициент на проектирането . . . . .	3
„ 8. Ориентирана равнина . . . . .	3
„ 9. Единица ъгъл . . . . .	3
„ 10. Ъгъл на две прави (полуправи) в една ориентирана (неориентирана) равнина . . . . .	4
„ 11. Ъгъл на две прави (полуправи) в пространството . . . . .	5
„ 12. Сноп прави в равнина . . . . .	6
„ 13. Координата на една променлива права в сноп прави . . . . .	6
„ 14. Тригонометрична бележка . . . . .	6

## Глава I.

### Декартови координати в равнината

§ 15. Ос . . . . .	7
„ 16. Декартови координати на една точка в равнината . . . . .	7
„ 17. Основно свойство на проекциите на един сегмент $A_1A_2$ върху координатните оси . . . . .	7
„ 18. Параметрично уравнение на абсцисната ос . . . . .	8
„ 19. Трансформация на абсцисите . . . . .	8
„ 20. Предмет на аналитична геометрия . . . . .	8
„ 21. Параметрични уравнения на правата . . . . .	9
„ 22. Решенията на уравнението $ax + by + c = 0$ се представят графично с една права . . . . .	10
„ 23. Частни положения на правата . . . . .	11
„ 24. Разстояние на една точка до началото . . . . .	12
„ 25. Зависимости между коефициентите на проектирането и ъглите . . . . .	12
„ 26. Разстояние между две точки . . . . .	12
„ 27. Ъгъл между две прави . . . . .	13
„ 28. Условие за перпендикулярност . . . . .	13
„ 29. Условие за успоредност . . . . .	13
„ 30. Други параметрични уравнения на правата . . . . .	14
„ 31. Нормално уравнение на правата (Hesse) . . . . .	14
„ 32. Привеждане на обикновеното уравнение на правата в нормално . . . . .	15
„ 33. Разстояние на точка до една права . . . . .	15
„ 34. Ъглополовящи на ъглите, образувани от две прави . . . . .	16
„ 35. Ъгъл между две прави . . . . .	16
„ 36. Аналитично представяне на сноп прави . . . . .	17
„ 37. Друго условие за пресичането на три прави в една точка . . . . .	18
„ 38. Мрежа от прави . . . . .	19

## Глава II.

*Трансформация на координатите*

	Стр.
§ 39. Случаи с ортогонални координати . . . . .	19
" 40. Случаи с клиногнални координати . . . . .	22
" 41. Движение на една равнинна фигура върху една равнина . . . . .	23
" 42. Полярна координатна система . . . . .	24
" 43. Площ на един триъгълник . . . . .	25
" 44. Площта на триъгълника в клиногнална система . . . . .	26
" 45. Имагинерни точки . . . . .	27
" 46. Имагинерни прави в равнината . . . . .	28
" 47. Изотропни прави . . . . .	29

## Глава III.

*Аналитично представяне на равнинните криви линии*

§ 48. Дефиниция на геометрично място . . . . .	30
" 49. Алгебрични и трансцендентни криви . . . . .	31
" 50. Симетричност относно осите или началото . . . . .	32

## Глава IV.

*Хомогенни декартови координати*

§ 51. Определение . . . . .	33
" 52. Праволинеен ред точки . . . . .	34
" 53. Хомогенно уравнение на една права . . . . .	34
" 54. Безкрайно отдалечената права линия в координатната равнина . . . . .	34
" 55. Трансформация на хомогенните координати . . . . .	35
" 56. Успоредни прави . . . . .	35
" 57. Циклични точки . . . . .	35
" 58. Хомогенни тангенциални координати . . . . .	36
" 59. Приложение на хомогенните координати . . . . .	36
" 60. Точкови и тангенциални уравнения на кривите линии . . . . .	37

## ЧАСТ ВТОРА

## Основни формули на аналитичната геометрия в пространството

## Глава V.

*Проективни зависимости между точки, прави и равнини*

§ 61. Декартова координатна система . . . . .	39
" 62. Първа група параметрични уравнения на правата линия . . . . .	40
" 63. Втора група параметрични уравнения на правата линия . . . . .	41
" 64. Уравнения на проектируещите равнини на една права . . . . .	41
" 65. Първа група параметрични уравнения на равнината . . . . .	42
" 66. Втора група параметрични уравнения на равнината . . . . .	42
" 67. Обикновено уравнение на равнината . . . . .	43
" 68. Отрезково уравнение на равнината . . . . .	44
" 69. Частни положения на една равнина . . . . .	44
" 70. Равнини през една точка . . . . .	45
" 71. Две успоредни равнини . . . . .	45
" 72. Други уравнения, които представят една права . . . . .	46
" 73. Успоредност на две прави . . . . .	47
" 74. Сноп равнини . . . . .	48
" 75. Обща точка на три равнини . . . . .	48

„ 76. Взаимни положения на права и равнина . . . . .	49
„ 77. Четири равнини с обща точка . . . . .	50
„ 78. Три равнини от един сноп и четири равнини на една звезда . . . . .	51
„ 79. Мрежа от равнини . . . . .	52

## Глава VI.

*Метрични зависимости: разстояния, ъгли, площи, обеми*

§ 81. Успоредно проектиране на отсечки . . . . .	52
„ 81. Основна теорема на проекциите в пространството . . . . .	53
„ 82. Проекция на един триъгълник . . . . .	54
„ 83. Разстояние между две точки . . . . .	54
„ 84. Ъгълни зависимости . . . . .	55
„ 85. Параметрични уравнения на правата с метрични елементи . . . . .	55
„ 86. Ъгъл между две прави линии . . . . .	57
„ 87. Нормално уравнение на равнината . . . . .	58
„ 88. Разстояние на точка от равнина . . . . .	59
„ 89. Площ на триъгълник и обем на тетраедър . . . . .	61
„ 90. Ъгъл между две равнини . . . . .	62
„ 91. Ъгъл между права и равнина . . . . .	63
„ 92. Косинус-директорите на пресечницата на две равнини . . . . .	64
„ 93. Ос на две кръгосани прави линии . . . . .	65

## Глава VII.

*Трансформация на координатите*

§ 94. Трансформация на декартовите координати . . . . .	67
„ 95. Други координатни системи . . . . .	72
„ 96. Формули на Euler'a . . . . .	72

## Глава VIII.

*Хомогенни декартови координати*

§ 97. Дефиниция . . . . .	75
„ 98. Безкрайно отдалечената равнина . . . . .	76
„ 99. Трансформация на хомогенните координати . . . . .	76
„ 100. Успоредни равнини . . . . .	76
„ 101. Успоредни прави . . . . .	77
„ 102. Проективни зависимости . . . . .	77
„ 103. Хомогенни декартови тангенциални координати . . . . .	77
„ 104. Уравнение на точка . . . . .	77
„ 105. Точка, равнина и права линия в хомогенни координати . . . . .	77
„ 106. Имагинерни елементи . . . . .	78
„ 107. Абсолютна окръжност . . . . .	79
„ 108. Изотропни прави и равнини . . . . .	79
„ 109. Изотропен конус . . . . .	81

## Глава IX.

*Аналитично представяне на повърхнините и линиите в пространството*

§ 110. Уравнение на едно геометрично място . . . . .	81
„ 111. Уравнение на цилиндрите . . . . .	82
„ 112. Получаваме уравненията на цилиндрите, конусите и праволинейните повърхнини . . . . .	83
„ 113. Ротационни повърхнини . . . . .	84

	Стр.
„ 114. Параметрични уравнения на една крива линия или повърхнина	85
„ 115. Алгебрични и трансцендентни повърхнини	86
„ 116. Алгебрични криви	87
„ 117. Решение на една система линейни уравнения	87
„ 118. Ранг на една матрица	89
„ 119. Линейна независимост	90
„ 120. Системи от линейни хомогенни уравнения	94
„ 121. Решенията на една редуцирана система	95
„ 122. Метод на Frobenius за определяне на една основна система	97
„ 123. Линейни уравнения от общ вид	98
„ 124. Геометрични приложения	100

## Глава X.

### *Въведение във векторното смятане*

§ 125. Понятие за вектор	104
„ 126. Умножаване на един вектор с един скалар	105
„ 127. Събиране на векторите	106
„ 128. Събиране на три вектора	106
„ 129. Събиране на произволно число вектори	107
„ 130. Представяне на един вектор свързан с изчало (радиус-вектор).	108
„ 131. Теорема за проекциите на полигоните, образувани при събирането на повече от два вектора	108
„ 132. Разлагане на вектор	109
„ 133. Параметрични уравнения на правата линия	111
„ 134. Параметрични уравнения на една равнина	111
„ 135. Нормално уравнение на една равнина	111
„ 136. Разстояние на една точка от равнина	113
„ 137. Заключениеят ъгъл между две посоки	114
„ 138. Нормалата към два вектора, излизащи от началото на координатната система	116
„ 139. Скаларно (вътрешно) произведение на два вектора	117
„ 140. Векторно (външно) произведение на два вектора	119
„ 141. Различни видове смесени произведения	123
„ 142. Приложение на векторното смятане	126
„ 143. Въртене на едно твърдо тяло около една ос	128
„ 144. Трансформация на координатните системи	129
„ 145. Формули на Cayley	131
„ 146. Ос на две кръстосани прави	133

## ЧАСТ ТРЕТА

### Основи на синтетичната геометрия

#### *Основни понятия*

§ 147. Двойно отношение на четири точки върху една права линия	135
„ 148. Определение и свойства на проективната зависимост	138
„ 149. Геометрични приложения на проективната зависимост	139
„ 150. Теорема на Pappus	140
„ 151. Двойно отношение на четири равнини от един сноп равнини	141
„ 152. Друг вид на двойното отношение на четири прави и четири равнини	142
„ 153. Аналитично доказателство на всички свойства в § 147	143
„ 154. Хармонично деление	144
„ 155. Теорема на Laguerre	144
„ 156. Проективни координати в една фигура от първи ред	146
„ 157. Преминаване от една проективна система към абсцисна система	147
„ 158. Трансформация на проективните координатни системи	148

	Стр.
159. Хомогенни проективни координати в една форма от първи ред	149
160. Дефиниция на проективните координати в равнината	149
161. Единична точка и единична права	152
162. Геометрично значение на проективните координати в равнината	153
163. Трансформация на проективните координати	154
164. Проективни координати в пространството	156
165. Геометрично значение на проективните координати в пространството	157
166. Исторични белажки за развитието на проективната геометрия	158
167. Основни геометрични елементи	159
168. Операции проектиране и сечение	159
169. Безкрайно отдалечена точка на една права линия	160
170. Безкрайно отдалечена права линия на една равнина	161
171. Безкрайно отдалечена равнина	162
172. Основни геометрични форми	162
173. Основни предложения за взаимното положение на основните елементи	163
174. Самостоятелно аналитично изграждане на проективната геометрия	165
175. Перспективно положение на две равнинни фигури	166
176. Закон за дуалността в пространството	166
177. Примери за предложена от проективно естество	167
178. Дуалният закон в равнината	168
179. Дуалният закон в звездата	169
180. Дуалните принципи от аналитична гледна точка	170
181. Проективни свойства на една фигура и цел на проективната геометрия	170
182. Теоремите на Desargues за хомоложните триъгълници	171
183. Хармонични свойства на пълния четириъгълник и четиристранник	173
184. Матрични релации между хармоничните елементи	175
185. Двойката елементи, която дели хармонично други две двойки в една фигура от първи ред	175

## Глава XI.

*Проективни фигури от първи ред*

§ 186. Определение	176
187. Нормална форма на една проективна зависимост	179
188. Втора дефиниция на проективността между две фигури от първи ред	181
189. Произведение на две проективности	182
190. Обратни трансформации (проективности)	183
191. Проективно трансформиране на една проективност	183
192. Перспективни фигури от първи ред	184
193. Построяване на една проективност между две фигури от първи ред	185
194. Дефиниция на проективността според von Staudt	188
195. Убежни точки	191
196. Подобни редове	191
197. Еднакви редове	192
198. Еднакви снопове	192
199. Окръжността и право еднаквите снопове	194
200. Теорема на Pascal за окръжността	194
201. Хомографични фигури с един и същ носител	191
202. Построение на двойните елементи в две конглокални фигури	196
203. Права и обратна еднаквост на два снопа прави с общ център	197
204. Дегенерирана проективност	199
205. Инволюция в една фигура от първи ред	199
206. Ситетично разглеждане на инволюцията	202
207. Определяне на една инволюция	202
208. Дуалните теореми на Desargues	203
209. Двойните елементи на една инволюция	204



210. Построяване на двойните елементи на една инволюция . . . . .	205
211. Метрични свойства на инволюцията . . . . .	206
212. Концентрични снопове в инволюторно положение . . . . .	207
213. Циклична инволюция . . . . .	207
214. Обща спрегната двойка на две наложени инволюции . . . . .	208
215. Спрегнати перпендикулярни прави на една инволюция в снопа . . . . .	209
216. Имагинерните елементи според von Staudt . . . . .	209

## Глава XII.

*Проективност между две фигури от втори ред*

§ 217. Дефиниции . . . . .	210
218. Основно свойство . . . . .	212
219. Аналитично представяне на колинеацията между две равнини . . . . .	213
220. Изродена колинеация . . . . .	218
221. Група на неизродените колинеации . . . . .	221
222. Определение на проективността между две фигури от втори ред . . . . .	224
223. Аналитично определение на двойните елементи на две наложени полета . . . . .	225
224. Нормални уравнения на една хомография . . . . .	231
225. Перспективни полета и хомоложност . . . . .	233
226. Две колинеарни равнини и операциите проектиране и пресичане . . . . .	234
227. Най-общата хомоложност . . . . .	235
228. Основни свойства и построение на една хомоложност . . . . .	236
229. Хомоложността и дуалните теореми на Desargues . . . . .	237
230. Абсолютна инварианта на хомоложността . . . . .	238
231. Частни случаи на хомоложността . . . . .	238
232. Хармонична хомоложност . . . . .	242
233. Определение на афинитета . . . . .	243
234. Лица на два афинни триъгълника . . . . .	246
235. Група на афинитетите . . . . .	247
236. Подобни равнини . . . . .	248
237. Еднакви равнини . . . . .	252
238. Две колинеарни равнини и хомологията . . . . .	255
239. Корелативност между две равнини . . . . .	260
240. Корелация между две наложени равнини . . . . .	262
241. Хомоложни инцидентни елементи . . . . .	264
242. Равнинен поляритет . . . . .	265
243. Хомографични и еднакви звезди . . . . .	267
244. Корелативни звезди и ортогонална корелация между две звезди . . . . .	272
245. Ортогонална полярност в звездата или в безкрайно отдалечена равнина . . . . .	273

## Глава XIII.

*Проективност между фигури от трети ред*

§ 246. Дефиниции . . . . .	275
247. Основна теорема . . . . .	276
248. Уравнение за колинеарността между две пространства . . . . .	277
249. Изродена колинеация . . . . .	279
250. Група на неизродените колинеации в пространството . . . . .	280
251. Двойните елементи в една колинеация и видове колинеации . . . . .	282
252. Аналитично определение на една колинеация между две пространства . . . . .	289
253. Формули на Rthelot за две хомографични пространства . . . . .	291
254. Афинни пространства . . . . .	292
255. Подобни пространства . . . . .	294
256. Еднакви пространства . . . . .	295

§ 257. Класификация на реалните еднаквости в пространство . . . . .	297
„ 258. Разлагане на афинитета и подобие . . . . .	300
„ 259. Уравнения на една корелация в пространството . . . . .	303
„ 260. Двойни и инцидентни елементи в корелативните пространства . . . . .	305
„ 261. Инволюторна корелативност . . . . .	308
„ 262. Полярност в пространството . . . . .	309

## ЧАСТ ЧЕТВЪРТА

### Криви линии от втори ред

#### Глава XIV.

##### *Полярна теория*

§ 263. Исторични бележки . . . . .	311
„ 264. Дефиниция на коничните сечения . . . . .	312
„ 265. Пресечни точки на една права линия с едно конично сечение . . . . .	312
„ 266. Брой на точките, които определят едно конично сечение . . . . .	314
„ 267. Разните видове конични сечения . . . . .	315
„ 268. Сноп прави линии от втори клас . . . . .	319
„ 269. Проективно образуване на коничните сечения и снопове прави от втори клас . . . . .	320
„ 270. Уравнение на коничните сечения през четири точки . . . . .	325
„ 271. Теорема на Pascal . . . . .	326
§ 272. Приложение на Паскалевата теорема . . . . .	328
„ 273. Следствия от предложенията на Pascal и Brianchon . . . . .	329
„ 274. Двадни предложения за кривите от втори ред . . . . .	330
„ 275. Конюговани прави и точки спрямо едно конично сечение . . . . .	333
„ 276. Поляра на една точка и полюс на една права . . . . .	333
„ 277. Свойства на полюса и полярата . . . . .	335
„ 278. Двойка тангенти от една точка към една крива от втора степен . . . . .	336
„ 279. Зависимост между точковото и тангенциалното уравнение на една крива от втори ред . . . . .	337
„ 280. Построяване на полюса и полярата . . . . .	339
„ 281. Полярната теория спрямо изродено конично сечение . . . . .	339
„ 282. Проективна класификация на кривите от втора степен . . . . .	340
„ 283. Вътрешни и външни точки, секателни и несекателни спрямо едно конично сечение . . . . .	348
„ 284. Полярната теория на коничните сечения и полярната корелация . . . . .	351

#### Глава XV.

##### *Диаметрални свойства*

§ 285. Диаметри на едно конично сечение . . . . .	352
„ 286. Централно уравнение . . . . .	355
„ 287. Асимптоти на коничните сечения . . . . .	356

#### Глава XVI.

##### *Канонични уравнения*

„ 288. Главни направления на едно конично сечение . . . . .	357
„ 289. Уравнение на осите . . . . .	358
„ 290. Централни осни уравнения . . . . .	359
„ 291. Видове централни осни уравнения . . . . .	360
„ 292. Уравнение, което дава дължините на осите на едно централно конично сечение . . . . .	360
„ 293. Редукция на уравнението на нецентрално конично сечение . . . . .	361

§ 294. Аналитично представяне на оста и върховата тангента на една парабола . . . . .	363
„ 295. Подобни и еднакво разположени централни конични сечения . . . . .	365
„ 296. Общ образувателен закон на недегерованите конични сечения . . . . .	367
„ 297. Уравненията, които определят фокусите на едно конично сечение . . . . .	369
„ 298. Инварианти . . . . .	370
„ 299. Каноничните уравнения на коничните сечения и инвариантите . . . . .	379

## Глава XVII.

*Специални свойства на коничните сечения*

§ 300. Фокусите на коничните сечения . . . . .	381
„ 301. Фокусите и уравненията на коничните сечения . . . . .	382
„ 302. Параметър на едно конично сечение . . . . .	384
„ 303. Линеен и числен ексцентрицитет . . . . .	384
„ 304. Фокусно уравнение на коничните сечения . . . . .	384
„ 305. Важни уравнения за небесната механика . . . . .	385
„ 306. Тангента и нормала към елипсата . . . . .	387
„ 307. Уравнение на тангентите, прекарани от една точка към елипсата . . . . .	387
„ 308. Разстояние от центъра на елипсата до една тангента . . . . .	388
„ 309. Разстояния на фокусите до една тангента . . . . .	389
„ 310. Свойства на фокалните радиуси . . . . .	390
„ 311. Тангентите от една точка и фокалните радиус вектори . . . . .	390
„ 312. Спрегнати диаметри . . . . .	391
„ 313. Площта на паралелограма от два спрегнати диаметра . . . . .	393
„ 314. Ъгъл между два конюговани полудиаметра . . . . .	393
„ 315. Разни построения на елипсата . . . . .	394
„ 316. Площ на елипсата . . . . .	396
„ 317. Асимптотите на хиперболата като координатни оси . . . . .	397
„ 318. Построения на хиперболата . . . . .	397
„ 319. Параболата е дегенерирана елипса или хипербола . . . . .	398
„ 320. Поляра, тангента, нормала и разни свойства на параболата . . . . .	399
„ 321. Три единства на коничните сечения . . . . .	400

## Глава XVIII.

*Окръжност и инверзия*

§ 322. Уравнение на окръжността в правоъгълна координатна система . . . . .	403
„ 323. Окръжност, отределена с три точки . . . . .	405
„ 324. Степен на точка спрямо окръжност . . . . .	406
„ 325. Хордала на две окръжности . . . . .	407
„ 326. Взаимно положение на две окръжности . . . . .	407
„ 327. Радикален център на три окръжности . . . . .	408
„ 328. Сноп окръжности . . . . .	408
„ 329. Ортогоналност на две окръжности . . . . .	409
„ 330. Видове снопове окръжности . . . . .	409
„ 331. Ортогонални снопове окръжности . . . . .	410
„ 332. Инверзия . . . . .	411
„ 333. Формула на инверзията . . . . .	411
„ 334. Аналитично доказателство за запазване на ъглите при инверзията . . . . .	414
„ 335. Двойното отношение на четири точки от една окръжност при инверзията се запазва . . . . .	415
„ 336. Аполониевата задача според Casey . . . . .	416

## Глава XIX.

## Сноп и рой конични сечения

	Стр.
§ 337. Взаимно положение на две конични сечения . . . . .	417
„ 338. Свойства на снопа и роя конични сечения . . . . .	418
„ 339. Дегенеровани конични сечения в снопа $f - \lambda\phi = 0$ . . . . .	420
„ 340. Определяне общите тангенти на две конични сечения . . . . .	422
„ 341. Геометрична метода за определяне на $\alpha_{ik}$ . . . . .	423
„ 342. Определяне на $\alpha_{ik}$ с инвариантите . . . . .	425
„ 343. Хомофокални централни конични сечения . . . . .	428
„ 344. Хомофокални параболи . . . . .	430
„ 345. Елиптични координати . . . . .	430
„ 346. Проективни конични сечения . . . . .	431

## ЧАСТ ПЕТА

## Повърхнини от втори ред

## Глава XX.

## Полярна теория

§ 347. Дефиниция на повърхнините от втора степен и втори клас . . . . .	434
„ 348. Пресечни точки с една права . . . . .	435
„ 349. Пресечна крива на една повърхнина от втора степен с една равнина . . . . .	437
„ 350. Полярна равнина . . . . .	438
„ 351. Тангенциално уравнение на повърхнините от втора степен . . . . .	439
„ 352. Проективна класификация на повърхнините от втора степен . . . . .	444
„ 353. Полярна теория относно изродена повърхнина . . . . .	447
„ 354. Повърхнини от втори клас . . . . .	449
„ 355. Проективно образуване на повърхнините от втора степен и втори клас . . . . .	450
„ 356. Свойства на реалните праволинейни повърхнини от втора степен . . . . .	458

## Глава XXI.

## Диаметрални свойства и кснонични уравнения

§ 357. Център на повърхнините от втора степен . . . . .	458
„ 358. Уравнения и свойства на диаметрите и диаметралните равнини . . . . .	460
„ 359. Централно уравнение . . . . .	463
„ 360. Главни направления . . . . .	463
„ 361. Фокални конични сечения . . . . .	467
„ 362. Свойства на фокалните разстояния . . . . .	470
„ 363. Канонични уравнения на централните повърхнини . . . . .	471
„ 364. Канонични уравнения на нецентралните повърхнини . . . . .	476
„ 365. Координатите на върха на един параболоид . . . . .	482
„ 366. Сечения с безкрайната равнина . . . . .	483
„ 367. Сеченията на успоредни равнини с една повърхнина . . . . .	484
„ 368. Инварианти на повърхнините от втора степен . . . . .	491
„ 369. Изчисление коефициентите на каноничните уравнения на централните повърхнини и параболоидите . . . . .	492
„ 370. За (равностранния) конус . . . . .	493

## Глава XXII.

*Свойства на различните повърхнини от втора степен*

Стр.

§ 371.	Елипсоид . . . . .	495
372.	Хиперболоид с една плащаница . . . . .	501
373.	Ортогонален хиперболоид . . . . .	508
374.	Хиперболоид с две плащаници . . . . .	510
375.	Елиптичен параболоид . . . . .	513
376.	Хиперболически параболоид . . . . .	516
377.	Абсолютната окръжност и кръжните сечения . . . . .	522

## Глава XXIII.

*Сфера и инверзия*

§ 378.	Уравнение на сфера . . . . .	525
379.	Уравнение на изотропния конус . . . . .	526
380.	Степен на точка . . . . .	527
381.	Хордална равнина . . . . .	528
382.	Линейни системи на сферата . . . . .	529
383.	Спрегнати линейни системи . . . . .	533
384.	Разисквания с формулите на Richelot . . . . .	534
385.	Релефна перспектива . . . . .	536
386.	Трансформиране на една сфера сама в себе и трансформации на Lorentz . . . . .	537
387.	Релативно значение на формулите на Lorentz . . . . .	539
388.	Масщабни и часовникови изменения според формулите на Lorentz . . . . .	541
389.	Относителност на явленията . . . . .	542
390.	Групово свойство на трансформациите на Lorentz . . . . .	542
391.	Дефиниция на инверзията . . . . .	543
392.	Трансформация на сферите и окръжностите . . . . .	545
393.	Изгонално свойство на инверзията . . . . .	546
394.	Двойното отношение на четири точки от една окръжност при инверзията се запазва . . . . .	547
395.	Произведение на инверзии . . . . .	547
396.	Хомографична трансформация на сферата сама в себе . . . . .	551
397.	Проективната трансформация от гледна точка на теорията на функциите . . . . .	554

## Глава XXIV.

*Сноп и рой повърхнини от втори ред. Проблеми относно две повърхнини*

§ 398.	Сноп и рой повърхнини . . . . .	557
399.	Общ полярен тетраедър на две повърхнини . . . . .	560
400.	Конфокални централни повърхнини . . . . .	566
401.	Свойства на хомофокалните повърхнини . . . . .	568
402.	Елиптични координати . . . . .	569
403.	Хомофокални нецентрални повърхнини . . . . .	570
404.	Едно свойство на хомофокалните повърхнини . . . . .	572
405.	Дефиниция на фокалните линии според Steiner . . . . .	573
406.	Фокални оси и директриси . . . . .	578
407.	Фокусите и цикличните равнини . . . . .	580
408.	Образувателни закони на централните повърхнини . . . . .	581
409.	Образувателни закони на нецентралните повърхнини . . . . .	583
410.	Двете тройки хомографични хомофокални повърхнини от втора степен според Smith . . . . .	585
411.	Деформация на елипсоида, запазваща кръжните сечения . . . . .	587
412.	Хиперболоидът с една плащаница и формулите на Ivory . . . . .	589

## ЧАСТ ШЕСТА

## Тетрациклични координати

## Глава XXV.

	Стр.
§ 413. Предварителни разглеждания . . . . .	591
" 414. Определение на тетрацикличните координати . . . . .	595
" 415. Едно свойство на инверзията в равнината . . . . .	596
" 416. Едно свойство на тетрацикличната координатна система . . . . .	597
" 417. Метрични зависимости . . . . .	598
" 418. Окръжността и правата линия в тетрациклични координати . . . . .	598
" 419. Трансформация на тетрацикличните координати . . . . .	602
" 420. Приложение за решение на обобщената задача на Аполониус от Перга . . . . .	604

## Глава XXVI.

§ 421. Циклики . . . . .	601
" 422. Канонично уравнение на една цикълка . . . . .	612
" 423. Циклика от трета степен . . . . .	614
" 424. Аналагматични криви линии . . . . .	618

## ЧАСТ СЕДМА

## Геометрия на правата линия

## Глава XXVII.

§ 425. Исторични бележки . . . . .	623
" 426. Двойна дефиниция на координатите на правата линия . . . . .	624
" 427. Условие за пресичане на две прави . . . . .	628
" 428. Сноп прави и звезда прави . . . . .	629
" 429. Линеен комплекс прави . . . . .	631
" 430. Свойства на линейния комплекс . . . . .	632
" 431. Канонично уравнение на линейния комплекс . . . . .	635
" 432. Други свойства на линейния комплекс . . . . .	637
" 433. Линейните координати на Plücker с векторно смятане . . . . .	638

## ЧАСТ ОСМА

## Хиперболична геометрия в равнината

## Глава XXVIII

§ 434. Исторически преглед върху развитието на неевклидовата геометрия . . . . .	642
" 435. Означения в хиперболичната геометрия . . . . .	645
" 436. Еднаквост в хиперболичната геометрия . . . . .	648
" 437. Независимост на аксиомата за успоредността . . . . .	653
" 438. Разстояние между две точки и ъгъл между две прави . . . . .	653
" 439. Ортогоналност. Ъгъл между два лъча в смисъл на елементарната геометрия . . . . .	658
" 440. Паралелност . . . . .	661
" 441. Хиперболична тригонометрия . . . . .	664
" 442. Окръжности и хиперцикли . . . . .	667